

ESTABILIDADE DAS GRELHAS DE CONVÉS DE NAVIOS

PETER KALEFF

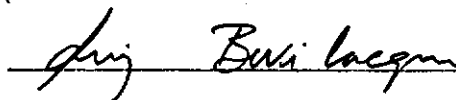
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO
DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO
PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTEN
ÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.)


Aprovada por:



Presidente







RIO DE JANEIRO

ESTÁDO DA GUANABARA - BRASÍL

MAIO DE 1971

A G R A D E C I M E N T O S

Ao Professor Dimitri M. Rostovtsev pela sugestão, orientação e constante assistência a êste trabalho.

Ao Professor João Luís H. Selasco, cujo convite possibilitou a conclusão do curso de mestrado nesta instituição.

Aos amigos da NCE-UFRJ por sua colaboração e assistência.

A todos os amigos da COPPE que direta ou indiretamente sugeriram modificações e melhorias.

S I N O P S E

Estabelece-se a necessidade do estudo da instabilidade de grelhas de convês com base no estudo da carga derradeira suportada pela viga navio.

Após revisão dos métodos existentes sugere-se e desenvolve-se uma teoria apurada de resposta de um elemento estrutural unidimensional sujeito a forças compressivas, com inclusão de efeitos torcionais e de cisalhamento, visando a aplicação de métodos matriciais de engenharia estrutural.

Obtida a matriz de resposta do elemento estrutural descrito, monta-se, pelos meios usualmente empregados, a matriz de resposta de toda a estrutura; deduzindo-se, então, a característica de instabilidade da mesma pelo raciocínio de aproximações sucessivas.

Com êsse fundamento teórico, procura-se um encadeamento lógico que, aliado a processos numéricos, permita a obtenção da carga de instabilidade de modo automático. O fluxograma de comandos lógicos elementares daí decorrente é traduzido para a linguagem de um computador científico.

Apresenta-se um programa FORTRAN, válido para processamento em um sistema IBM 1130 com 32K de memória interna ou alternativamente, sistema IBM 360/40.

Com base nesse programa, apresentam-se resultados de uma pesquisa feita com o intuito de quantificar efeitos torcionais, de cisalhamento, e engastamento das extremidades da grelha.

* * *

S Y N O P S I S

Based on the study of ultima loads for the ship hull girder, we establish the need of determining instability loads of deck grillages.

After a review on existing methods and accurate theory, including torsional and shear effects, is developed for the response of a one dimensional structure element subjected to compressive forces, intending its use on matrix methods for structural engineering.

With the response matrix of such element in hands, we mount the overall response matrix of the whole structure by usually known methods, and afterwards derive the instability characteristic for it with a step by step method reasoning.

With such theoretical embasement we develop a logical-numerical procedure wich will enable us to find instability loads in a totally automated numerical way. The flow diagram of elementary logical commands based on that procedure is translated to the language of a scientific computer.

We present a FORTRAN program wich may be run on an IBM-System 1130 with 32 K core, or alternatively the IBM-System 360/40.

Using this program we are able to quantify the torsional and shear effects on the grillage's girders as well as built in boundaries.

* * *

Í N D I C E

AGRADECIMENTOS	i
SINOPSE	ii
LISTA DE TABELAS	viii
LISTA DE APÊNDICES	ix
SIMBOLOGIA	x
CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	
01 - O navio como estrutura	1
02 - O navio como viga autoequilibrada	2
03 - Critérios de resistência para a viga-navio	2
CAPÍTULO II - MODELOS SUBSTITUTOS DE UMA ESTRUTURA DE CONVÊS DE CONVÊS	
01 - k _c	7
02 - Grelha aberta	9
03 - Chapa ortotrópica	12
04 - Modelo exato	14
05 - Discussão	14
CAPÍTULO III - SOLUÇÕES TEÓRICAS PARA O PROBLEMA DE INSTABILIDADE DE GRELHAS	
01 - Solução utilizando estimativa do modo de fle- xão das vigas	18
02 - Solução por transformada de Laplace	25
03 - Crítica às soluções teóricas	29

CAPÍTULO IV - SOLUÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS

01 - Métodos matriciais de análise estrutural . . .	32
02 - Idealização estrutural	32
03 - Analogia entre elemento de grêlha e elemento representativo de estrutura de convês	33
04 - Características elásticas e inerciais de um e- lemento típico de grelha ,	36
05 - Características inerciais e elásticas da estru- tura montada	46
06 - Equação de instabilidade da estrutura global .	53

CAPÍTULO V - PROCEDIMENTO LÓGICO E NUMÉRICO NA SOLU- ÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS

01 - Identificação da estrutura	56
02 - Processo de numeração dos nós	57
03 - Condições de contorno e graus de liberdade . .	58
04 - Numeração dos graus de liberdade e número. to- tal de graus de liberdade	60
05 - Elementos estruturais que influenciam cada grau de liberdade	62
06 - Matriz indexal	62
07 - Matriz global de rigidez K	64
08 - Autovalores da matriz de rigidez K	66
09 - Geração de um elemento genérico da matriz de rigidez	71
10 - Forma modificada da matriz de resposta do ele- mento no sistema local de coordenadas	73
11 - Forma modificada da matriz de resposta do ele- mento no sistema global de coordenadas	82
12 - Diagrama de blocos simplificado	86

CAPÍTULO VI - PROGRAMA FORTRAN PARA SOLUÇÃO DO PROBLEMA GERAL DE INSTABILIDADE POR MEIO DE COMPUTADORES

01	89
02 - Leitura das características da estrutura . . .	89
03 - Leitura das condições de contorno e graus de liberdade	90
04 - Numeração das deslocabilidades efetivas da estrutura	91
05 - Determinação da largura da cinta	92
06 - Geração da tabela de relacionamento	92
07 - Geração da matriz indexal	93
08 - Intervalo de variação da tensão e precisão desejada	94
09 - Determinação do primeiro quadrado da cinta . .	95
10 - Zeragem da primeira coluna da matriz operacional	96
11 - Cálculo de mais uma linha e coluna da matriz operacional	97
12 - Teste para o fim da cinta	97
13 - Análise de resultados e escolha de novo valor de μ	98
14 - Subprograma para determinação dos termos da matriz de resposta do elemento que contribuem para a matriz global de resposta	98
15 - Comentários	99

CAPÍTULO VII - APLICAÇÕES E RESULTADOS

01 -	100
02 - Estudo de uma grelha simplificada	100
03 - Estudo de uma grelha genérica	103
04 - Objetivos do estudo com grelha genérica . . .	105
05 - Resultados do estudo da grelha genérica . . .	108

06 - Conclusões	112
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	114
APÊNDICES	116

* * *

LISTA DE TABELAS

4.1 - Matriz k_R	42
4.2 - Matriz k_G	43
5.1 - Matriz indexal	63
5.2 - Matriz k_R com deslocamentos redefinidos	78
5.3 - Matriz k_G com deslocamentos redefinidos	79
5.4 - Matriz k'_R (fator EI_o/ℓ_o^3 em evidência)	80
5.5 - Matriz k'_G (fator EI_o/ℓ_o^3 em evidência)	81
5.6 - Matriz $ \bar{k} $	85
7.1 - Estudo do efeito de engastamento das longitudi - nais	111
7.2 - Estudo do efeito de inclusão de torção e cisalha- mento	111

LISTA DE APÊNDICES

APÊNDICE

I	-	CARACTERÍSTICAS DE RESPOSTA DE UM ELEMENTO DE GRELHA INCLUINDO EFEITOS DE TORÇÃO E CISALHAMENTO	116
II	-	DEDUÇÃO DAS MATRIZES DE RESPOSTA DE UM ELEMENTO DE GRELHA	125
III	-	LISTAGEM DE PROGRAMA FORTRAN PARA SOLUÇÃO DO PROBLEMA GERAL DE INSTABILIDADE	135
IV	-	SAÍDA DO PROGRAMA PARA SOLUÇÃO DA GRELHA SIMPLIFICADA (VII - 02)	140

S I M B O L O G I A

$|u|$ - matriz u


\int - integral

Σ - somatória

$\rightarrow, \curvearrowright$ - deslocamento angular

\longrightarrow - deslocamento linear

$\circlearrowleft, \triangle$ - junta articulada

 - junta semiengastada

CAPÍTULO I

I N T R O D U Ç Ã O

01 - O navio como estrutura.

O navio é uma casca, de formas não representáveis analiticamente, reforçada por um reticulado de vigas transversais e longitudinais, as quais por sua vez são apoiadas em anteparas distribuídas ao longo do comprimento. Essa estrutura complexa fica sujeita a diversos tipos de carregamento no transcorrer do período útil em que é explorada. Tais carregamentos são devidos principalmente à ação das ondas do mar, a qual, embora dependente do instante considerado, pode ser admitida como estática nesse instante, pois a frequência com que incide é bem inferior às frequências naturais da estrutura do casco.

Por outro lado, sendo o comprimento do navio uma dimensão grande comparada com as dimensões transversais (bôca e pontal), verifica-se que as tensões provocadas nas secções transversais pelos carregamentos laterais (ondas, carga) se assemelham muito às que se verificariam em uma viga de mesmo comprimento e sujeita ao mesmo carregamento. Daí o conceito tradicional de se considerar o navio, em primeira aproximação e em se tratando do estudo de forças externas, como uma viga de secção fechada e paredes delgadas.

02 - O navio como viga autoequilibrada.

A flutuabilidade do navio é garantida pela distribuição das pressões agentes no fundo e costados, cuja resultante é conhecida como empuxo.

Para que o navio esteja em equilíbrio é preciso que o peso e as forças de inércia, aplicados no centro de gravidade e dependente da distribuição de peso próprio e carga ao longo do comprimento, sejam anulados pelo empuxo e forças hidrodinâmicas aplicados ao centro de empuxo da parte imersa do navio, os quais, por sua vez, dependem da distribuição de pressões ao longo do casco imerso, e, portanto, da configuração das ondas no instante considerado.

Podemos, pois, observar que o navio não apresenta apoios sólidos, mas garante o equilíbrio assumindo posição conveniente no meio fluido e que, portanto, é uma estrutura autoequilibrada.

O carregamento a que está sujeito será, então, para cada secção em cada instante, a diferença entre o peso (valor fixo) e o empuxo (valor dependente da distribuição das ondas, agentes nesse instante naquela secção).

03 - Critérios de resistência para a viga navio.

a) Ao se projetar uma estrutura, procura-se prever os carregamentos máximos aos quais ela estará sujeita e com base nêles e em critérios de resistência sãos, dimensionar os

componentes que irão montá-la.

Para a viga navio, sujeita a ações do tipo descrito, torna-se bastante difícil prever com exatidão quais os carregamentos máximos; devido não somente à imprevisibilidade das condições do mar como também à extrema flexibilidade das rotas que o navio irá percorrer. Daí surgir a necessidade de se estimar um determinado valor de carregamento que garanta uma probabilidade extremamente baixa (10^{-8}) de falha. Nota-se então que cargas suficientemente altas a ponto de provocar falha são muito raras. Nessas condições, um critério que nos permita estimar qual o máximo carregamento que um navio pode suportar antes da falha é muito útil, visto que nos faculta calcular a probabilidade que terá esse navio de falhar, ou reprojeta-lo para que a probabilidade de falha não exceda determinado valor.

b) Seja a viga navio, sujeita em determinado instante a uma distribuição de momentos fletores cujo valor máximo é M_{\max} (Fig. 1.1).

Em primeira aproximação podemos imaginar uma distribuição ideal de tensões normais. As regiões mais solicitadas serão convêses (σ_c) e fundos (σ_f).

O método clássico de cálculo da resistência de um navio consiste em se procurar a resposta elástica da viga navio perante uma determinada condição de carregamento ocasiona

da pelas ondas. Calcula-se o módulo de resistência da seção através da teoria da flexão elástica, seu valor sendo tal que não se excedam determinados limites de tensão nas regiões mais solicitadas. Usa-se, portanto, o módulo de resistência à flexão como a principal medida da resistência longitudinal da viga navio.

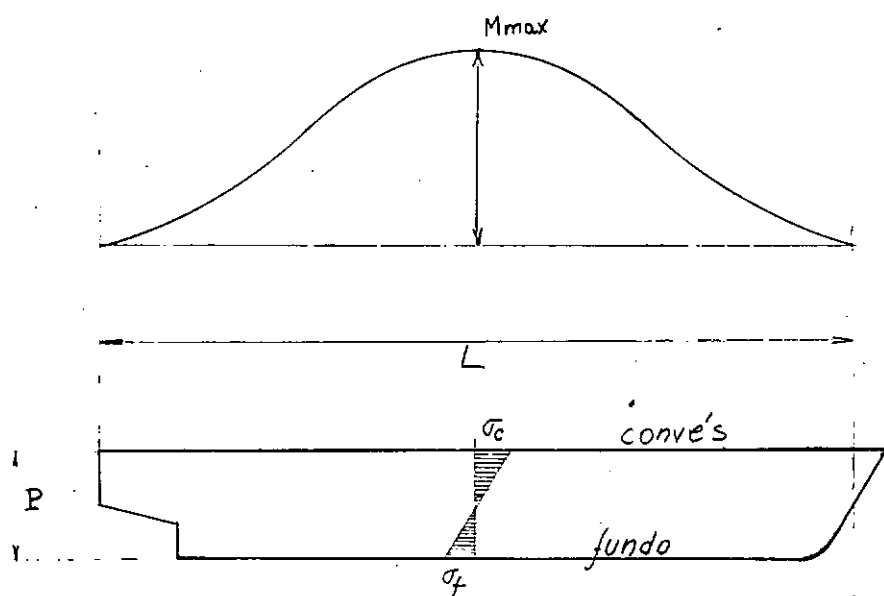


Fig. 1.1

- L = comprimento da viga navio;
- P = altura da viga navio (pontal);
- σ_c = tensão no convés;
- σ_f = tensão no fundo.

Nem sempre, porém, o módulo de elasticidade é um critério de resistência seguro. Dois navios construídos com

o mesmo material poderão ter o mesmo módulo de elasticidade de secção e conseqüentemente suportar os mesmos níveis de tensão e, no entanto, ocorrer que um deles suporte momentos fletôres muito maiores que o outro antes do colapso definitivo. Essa diferença entre as resistências máximas à flexão, pode ser devida à diferente resistência à flambagem de partes comprimidas da secção da viga (por exemplo, convêses).

Por êsse motivo, os cálculos de estabilidade de convêses, costados e fundos são um adendo essencial ao estudo da flexão elástica.

Em uma análise racional da resistência da viga navio deveremos, portanto, incluir a determinação de sua resistência flexional final real. Sômente assim poderemos achar uma margem de segurança efetiva como sendo a diferença entre o momento fletor final e, o máximo momento fletor (determinado de dados estatísticos sôbre ondas e carregamento) que o navio irá enfrentar durante a época de operação.

O conceito de carga final tem sido utilizado cada vez mais em outros ramos da engenharia estrutural e o uso do "fator de carga" (relacionando cargas finais e de projeto) tem sido cada vez mais difundido.

Naturalmente a determinação de carga final não põe de lado a necessidade de se assegurar que sob condições normais de trabalho o desempenho da estrutura, no que toca a

tensões e deformações locais ou gerais, seja satisfatório.

c) Cônclusões

Do exposto em b) fica patente a necessidade do cálculo de estabilidade para os membros comprimidos da secção da viga navio, tarefa essa que nos propomos no presente trabalho.

* * *

CAPÍTULO II

MODELOS SUBSTITUTOS DE UMA ESTRUTURA DE CONVÊS

01 - Um convês de navio é uma estrutura complexa, composta de chapas apoiadas em um reticulado de vigas ortogonais, que são as sicordas (longitudinais) e os vãos (transversais).

Na figura 2.1 está representada parte de um convês típico de navio de guerra.

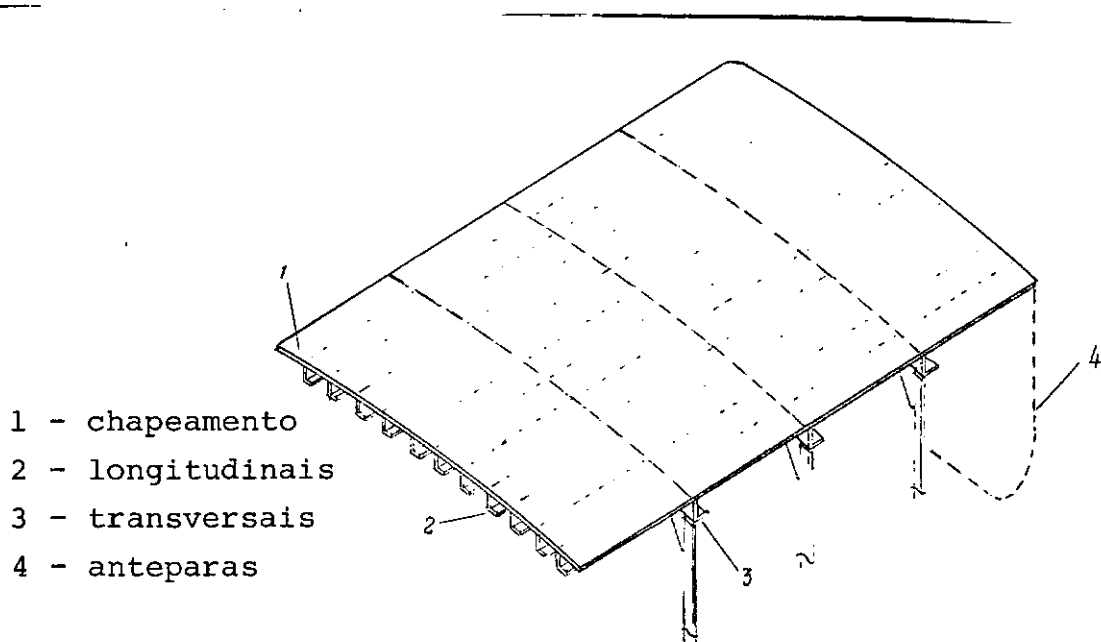
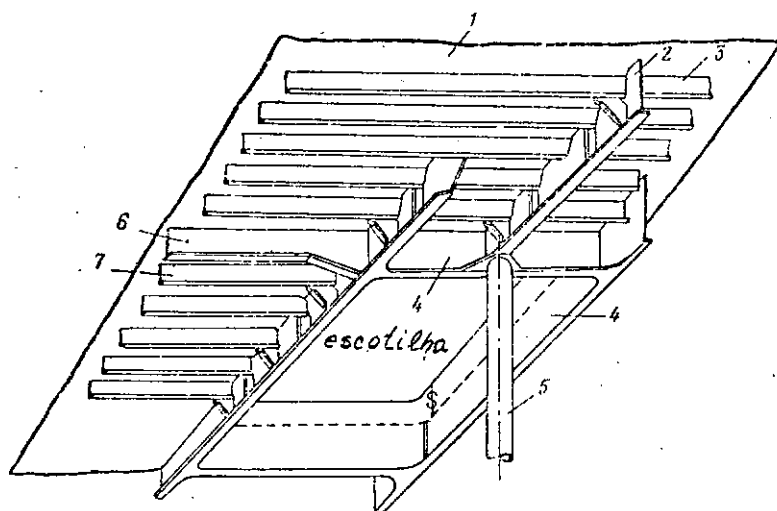


Fig. 2.1

Podemos notar que há uma certa regularidade no reticulado e ausência de aberturas no chapeamento.

Na figura 2.2 por sua vez, está representado um convês de navio cargueiro convencional, dotado de aberturas, vi-

gas reforçadas, pilares de apoio às vigas e anteparas nas extremidades.



- 1 - chapeamento
- 2 - longitudinal reforçada
- 3 - transversal
- 4 - braçola de escotilha
- 5 - pé de carneiro (pilar)
- 6 - transversal reforçada
- 7 - meia meia transversal

Fig. 2.2

Nesse caso, apenas alguns painéis podem ser considerados como regulares. Se quisermos, no entanto, considerar a estrutura como um todo, teremos que levar em conta as irregularidades provocadas pelas aberturas, pilares, e vigas reforçadas.

Pela filosofia de projeto adotada, devemos assegurar

rar a estabilidade de convés e fundo, por serem as regiões mais solicitadas pelas forças compressivas (Fig. 1.1), sendo que a análise do fundo pode geralmente ser omitida, pois os reforços necessários à resistência da estrutura do casco nas regiões de alta pressão hidrostática correspondentes ao fundo dos navios, são suficientes para assegurá-la. Precisamos então encontrar um modelo mecânico que represente, da maneira mais fiel possível, estruturas semelhantes às apresentadas (Figs. 2.1 e 2.2).

Podemos citar algumas variantes:

- a - grelha aberta;
- b - chapa ortotrópica;
- c - modelo exato.

a e b são aproximações do protótipo real, ao passo que c é uma representação exata.

Estudaremos a seguir algumas características de cada modelo para obter um critério de decisão.

02 - Grelha aberta

a) Se admitirmos o chapeamento como idealmente plano, e com estabilidade assegurada para os níveis de carga suportados pelo convés, poderemos imaginar que parte dêle sirva de aba às vigas que o apoiam. A participação do chapeamento na flexão do conjunto é devida principalmente às tensões de

cisalhamento agentes ao longo das linhas de junção entre a alma das vigas e o chapeamento, as quais provocam uma distribuição não uniforme de tensões normais (Fig. 2.3), quando a grelha estiver sujeita a carregamento lateral.

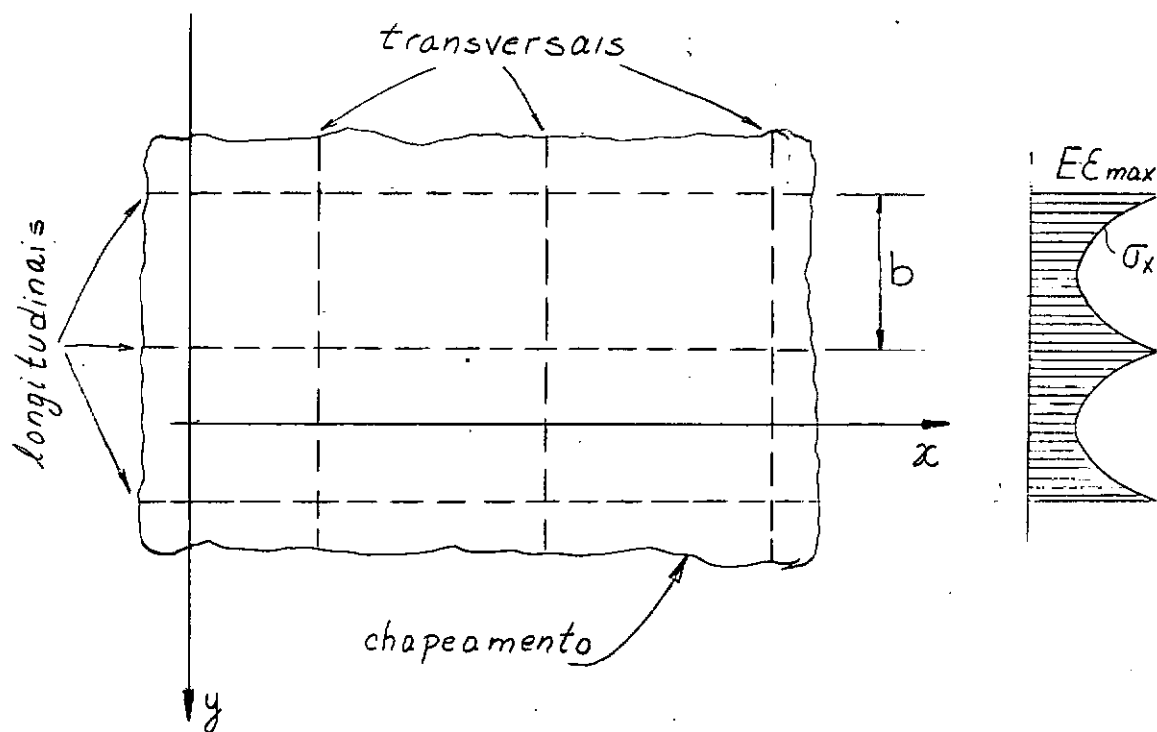


Fig. 2.3

Pode-se então definir largura efetiva de chapeamento como a largura que teria uma aba hipotética da viga, na qual se verifica uma distribuição uniforme de tensões de valor igual à tensão máxima verificada ($E\epsilon_{max}$) e cujo valor total seja igual ao valor da distribuição de σ_x ao longo de b, ou seja:

$$b_{ef} = b \frac{\frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} \sigma_x dy}{E\epsilon_{max}} \quad (2.1)$$

Em (2.1) se relacionou a tensão média agente na largura b com a tensão máxima; usando-se esse valor como critério de redução da largura real b .

Os demais critérios de determinação da largura colaborante efetiva, não serão aqui tratados, por não ser esse o objetivo do presente trabalho; pretende-se apenas citar que com base nêles foram determinados critérios simplificados e de aplicabilidade imediata que se mostrarão úteis em um ponto futuro de nossa análise.

Determinada pois a largura efetiva do chapeamento podemos admitir, que a estrutura se comporte como uma série de vigas separadas cada qual com sua largura colaborante efetiva, ou seja, que se comporte como uma grelha aberta.

No entanto, há um ponto em que a simples determinação da largura colaborante para simular uma grelha aberta não é suficiente. É o caso em que se levam em conta também os efeitos torcionais do carregamento. Obviamente, não podemos admitir que o chapeamento como um todo oponha a mesma resistência da viga separada às deformações torcionais; portanto, se efeitos torcionais forem levados em conta, a inércia torcional das vigas consideradas independentes deverá ser aumentada.

Percebe-se, pois, pela própria natureza da substituição, que o chapeamento é o fator de perturbação do modelo adotado, e, portanto, quanto menor sua espessura em relação

às dimensões das vigas tão mais fiel será a substituição.

b) O problema geral de uma grelha pode ser resolvido pela utilização do conceito de viga sobre base elástica. De fato, podemos idealizar uma grelha como dois conjuntos separados de vigas, um suportando a carga do sistema, o outro servindo de base ao primeiro. As interações dos dois conjuntos de vigas, servirão, respectivamente, de apoio do tipo elástico às vigas sujeitas à carga do sistema, e de carga às demais. Por outro lado, se o número de cargas (ou apoios) for suficiente (maior que 4) pode-se admitir distribuição uniforme de carga (ou apoio) ao longo de cada espaçamento. . .

Dêste modo podem-se colocar condições de compatibilidade entre os dois conjuntos de vigas que sejam satisfeitas de modo contínuo, e determinar-se o conjunto de equações diferenciais que governam a resposta da grelha.

O problema da grelha também poderá ser resolvido pelo método dos elementos finitos, utilizando-se elementos unidimensionais (vigas).

03 - Chapa ortotrópica

Podemos imaginar que o reticulado de vigas que apoia o chapeamento seja incorporado a êsse chapeamento, provocando o surgimento de direções preferenciais de flexão, fazendo, portanto, que o conjunto responda como chapa ortotrópica.

Para que essa substituição seja válida, é necessário que a estrutura reticulada suporte do chapeamento seja rigorosamente regular, como seja, vigas iguais e equiespaçadas em cada uma das direções. Consideremos as fórmulas de resposta a cargas puramente coplanares válidas para chapa ortotrópica:

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \lambda \left(T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - T_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.1)$$

onde T_1, T_2 = forças por unidade de comprimento, coplanares à grelha;

λ = parâmetro em proporção ao qual crescem as forças coplanares.

$$D_1 = \frac{E I_1}{a_1} ; \quad D_2 = \frac{E I_2}{a_2} ; \quad D_3 = \frac{D_{t1}}{a_1} + \frac{D_{t2}}{a_2} \quad (2.2)$$

onde $E I_1, E I_2$ = módulo de rigidez à flexão das vigas

a_1, a_2 = distância entre as vigas

D_{t1}, D_{t2} = módulo de rigidez à torção das vigas

Caso não haja perfeita regularidade, as substituições em (2.2) não são possíveis.

Conhecidas as condições de contorno e geometria da chapa, o valor de λ crítico poderá ser determinado pela condição de existência da solução não trivial da equação homogê-

nea (2.1).

Outra maneira é utilizar-se o método dos elementos finitos com elementos bi-dimensionais.

04 - Modelo exato

Por se tratar de uma representação exata não se podem fazer quaisquer simplificações.

Um modo de resolução é a utilização do método dos elementos finitos, lançando mão de uma divisão, tanto do chapeamento como das almas e abas das vigas em elementos de placa (bi-dimensionais).

É preciso ressaltar que este procedimento é o mais exato e mais universalmente aplicável, visto que não exige quaisquer hipóteses simplificadoras ou aproximações.

05 - Discussão

Procuremos escolher o modelo que melhor se aplique às nossas necessidades.

Queremos estudar um convés composto por chapeamento de espessura não muito grande apoiado em vigas de dimensões apreciáveis em relação àquela. Um convés típico dispõe a espaços, de vigas gigantes (tanto longitudinais como transversais), cuja finalidade é fornecer apoio às demais e reforçar possíveis aberturas (escotilhas), as quais nem sempre pertencem

cem a alguma linha de simetria do convês.

Tendo em mente a complexidade e irregularidade de semelhante estrutura, optar-se-ia pela solução exata utilizando elementos finitos. É preciso ressaltar, no entanto, o apreciável volume de cálculo que fica subentendido com a adoção dessa solução.

De fato, há necessidade de se subdividir a estrutura em número muito grande de elementos bi-dimensionais (tanto chapeamento quanto vigas), e para uma porção do convês compreendida entre duas anteparas o número desses elementos pode exceder 10.000. Com os computadores digitais atualmente em operação, o tempo de processamento atingiria limites proibitivos. Por outro lado, o trabalho de divisão da estrutura em elementos iria requerer inúmeras representações projetivas de chapeamento e vigas, aumentando grandemente a incidência de erros.

Temos pois que nos contentar com a adoção de um modelo simplificado.

a) A vantagem da chapa ortotrópica reside na rapidez da solução teórica nos casos em que esse modelo fôr aplicável, ou seja, estrutura perfeitamente regular, sem aberturas e condições de contorno uniformes. No entanto, quando aparecem irregularidades, as soluções teóricas não se aplicam, sendo necessário usar soluções numéricas (elementos fini-

tos) que implicam novamente em trabalho exaustivo de subdivisão (menos que no caso anterior) e que, além disso, não representam exatamente o protótipo que se deseja estudar.

b) Quando a espessura do chapeamento do convés é pequena em relação às dimensões seccionais das vigas, o modelo grelha aberta é uma boa representação.

A solução usando conceito de viga sobre base elástica, é rápida e pouco sujeita a erros, quando se trata de uma grelha regular de extremidades simplesmente apoiadas.

Para estruturas irregulares com condições de contorno variáveis, é necessário aplicar o método dos elementos finitos (para elementos unidimensionais). Porém, observada a hipótese de chapeamento com pequena espessura, a representação é fiel, e resolvido o problema da grelha, tem-se, com grande aproximação, a resposta de um convés. A solução por elementos finitos do problema da grelha é muito mais simples que a solução usando modelo exato de convés, pois trata apenas com elementos unidimensionais, para os quais as características de resposta são mais facilmente determináveis, além do fato de se poder utilizar um número muito menor de elementos (da ordem de 1.000).

Se nos contentarmos em abrir mão, até certo ponto, da representação exata de um convés mas, ao mesmo tempo, exigirmos a representação mais fiel possível, que permita a inclu-

são das principais peculiaridades, e que apresente um tempo de processamento aceitável, deveremos decidir-nos pelo uso do modelo grelha aberta.

* * *

CAPÍTULO III

SOLUÇÕES TEÓRICAS PARA O PROBLEMA DE INSTABILIDADE DE GRELHAS

Tendo decidido pelo modelo grelha aberta passemos a estudar a melhor maneira de resolvê-lo.

Para simplificar a linguagem adotaremos uma nomenclatura para as vigas. Chamaremos de longitudinais as vigas paralelas à direção das forças compressivas externas, e transversais às demais.

Analisemos de início as soluções teóricas existentes.

01 - Solução utilizando estimativa do modo de flexão das vi- gas.

Seja uma grelha regular com grande número de longitudinais e algumas transversais (Fig. 3.1).

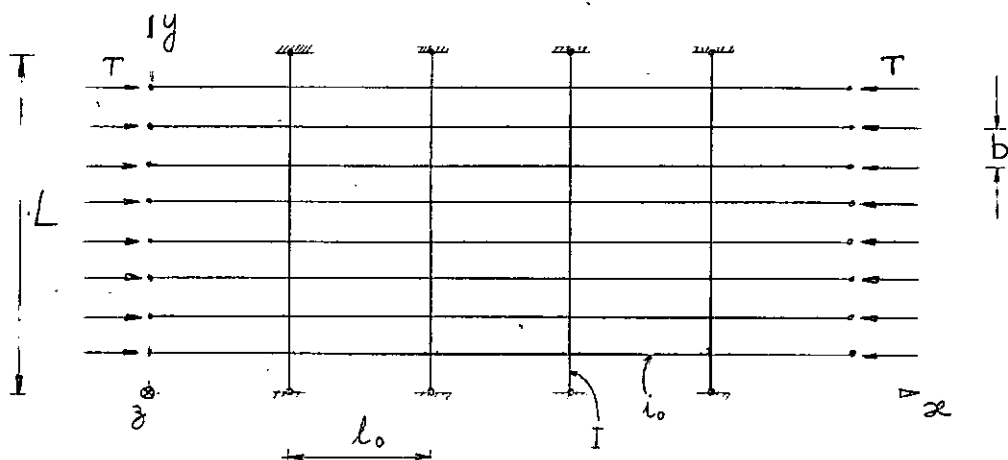


Fig. 3.1

Admitamos que na direção do eixo das longitudinais, ajam cargas T passíveis de variação.

Estudemos separadamente uma longitudinal genérica (fig. 3.2).

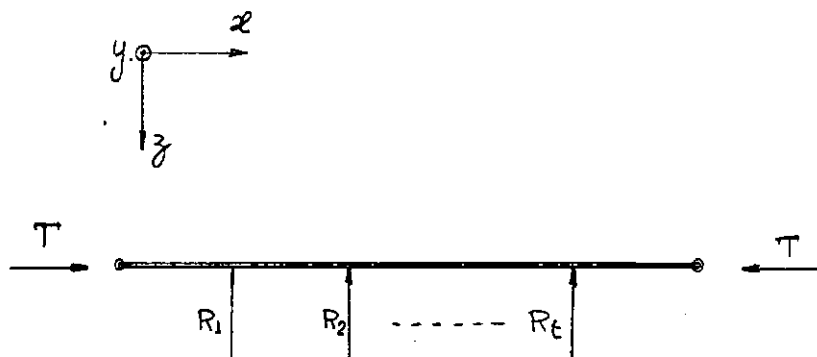


Fig. 3.2

Se admitirmos que os efeitos de torção e cisalhamento são de ordem a serem desprezados sem provocar grandes alterações nos resultados finais, poderemos fazer um estudo simplificado que no entanto fornece excelente aproximação.

a) A deflexão no ponto de aplicação da interação R_i é dada por

$$w_i(y_k) = - \sum_{j=1}^t \gamma_{ij}(u) \frac{R_j(y_k) \ell_o^3}{E i_o} \quad (3.1)$$

onde: $\gamma_{ij}(u)$ = coeficientes de influência que dependem da força axial (através de u).

t = número de vigas transversais.

$$u = \frac{\ell_o}{2} \sqrt{\frac{T}{Ei_o}}$$

Sendo as cargas compressivas T as únicas ações externas sobre a grelha, podemos afirmar que as vigas transversais estarão carregadas exclusivamente pelas interações $R_j(y_k)$. ($k = 1, \dots, \ell_t$, é o índice que determina qual a longitudinal). E ainda sendo $\ell_t > 4$ (grande número de longitudinais) podemos admitir que haja distribuição contínua da interação ao longo da transversal. Nesse caso a equação de flexão de uma transversal genérica passa a ser:

$$E I w_j^{(4)}(y) = \frac{R_j(y)}{b} \quad (3.2)$$

b = espaçamento das longitudinais.

b) As condições de compatibilidade do sistema deverão a rigor ser obedecidas apenas nos pontos onde houver interação, porém feita a hipótese de distribuição contínua da interação (e sabendo-se que os erros cometidos na estimação de momentos fletores são pequenos para grande número de longitudinais) podemos estender a compatibilidade ao longo de todo o comprimento das transversais, obtendo o sistema de equações que governa a grelha

$$w_i(y) = - \frac{\ell_o^3 b}{E i_o} \sum_{j=1}^t \gamma_{ij} (u) E I w_j^{(4)}(y) \quad (3.3)$$

$i = 1, \dots, \ell_t$

É um sistema de equações diferenciais homogêneas simultâneas cujos coeficientes dependem da força compressiva através do

parâmetro "u".

c) Tentemos um meio de desacoplar esse sistema.

Imaginemos que a forma assumida pelas transversais após a deflexão seja a mesma que seria assumida caso as transversais fletissem como vigas separadas.

A hipótese acima pode ser posta na forma:

$$w_j(y) = \alpha_j Y_m(y) \quad (3.4)$$

onde $Y_k(y)$ é a função de forma da flexão de uma transversal genérica e α_j é um fator de escala que modifica os $Y_m(y)$ devido à existência das longitudinais.

Assim sendo, a equação de flexão de uma transversal genérica se reduz a:

$$Y_m^{(4)}(y) - \left(\frac{\mu_m}{L}\right)^4 Y_m(y) = 0 \quad (3.5)$$

μ_m = autovalores de (3.5)

L = comprimento das transversais

os μ_m são determinados com vista às condições de contorno das transversais, que a integral de (3.5) deve satisfazer.

d) Se observarmos por outro lado que as deflexões nos pontos de cruzamento de longitudinais e transversais, são as mesmas para ambos os grupos de vigas, e que essa condição de compatibilidade foi estendida a toda a grelha de modo contínuo, poderemos pôr a deflexão de um ponto qualquer da grelha na mesma forma; inclusive do ponto i ,

$$w_i(y) = \alpha_i Y_m(y) \quad (3.6)$$

onde α_i ($i = 1, \dots, t$) é a deflexão de uma longitudinal genérica, alterada pelo fator de escala $Y_m(y)$; é portanto a função de forma das longitudinais.

Com (3.4), (3.5), (3.6) em (3.3) tem-se

$$\alpha_i Y_m(y) = - \frac{\ell_o^3 b}{E i_o} E I \left(\frac{\mu_m}{L} \right) Y_m(y) \sum_{j=1}^t \alpha_j \gamma_{ij}(u) \quad (3.7)$$

$$\alpha_i = - \frac{\ell_o^3 b}{E i_o} \sum_{j=1}^t \gamma_{ij}(u) \alpha_j E I \left(\frac{\mu_m}{L} \right)^4 \quad (3.8)$$

obtêm-se pois a função de forma da deflexão das longitudinais em função da resolução do problema de uma transversal genérica sujeita a condições de contorno (3.5).

Em (3.8) podemos ainda separar as grandezas que dependam apenas das longitudinais ou transversais. Para tanto chamemos

$$K = b E I \left(\frac{\mu_m}{L} \right)^4 \quad (3.9)$$

Segue-se de (3.9) e (3.8)

$$\alpha_i = - \sum_{j=1}^t \gamma_{ij}(u) \frac{\ell_o^3 K \alpha_j}{E i_o} \quad (3.10)$$

Se em (3.10) fizermos

$$R_j = K \alpha_j \quad (3.9)$$

recaímos em (3.1), e K é a rigidez do apoio elástico equivalente, fornecido pelas transversais.

Porém K é função dos autovalores μ_k ou seja, é função dos modos fundamentais de flexão que podem ser assumidos por uma transversal.

Devemos escolher o modo que implique em menor rigidez do apoio elástico, pois será aí a primeira ocorrência de instabilidade (os demais têm sentido apenas matemático, visto que a instabilidade implica em colapso da estrutura).

O menor dos autovalores é o primeiro e corresponde ao modo de flexão que implica em rigidez mínima. Interessa-nos pois o caso com $\mu_{\min} = \mu_1$ e

$$K = b EI \left(\frac{\mu_1}{L} \right)^4 \quad (3.11)$$

Em nosso problema devemos admitir conhecidas as características das longitudinais. Nesse caso resta determinar qual o K (e portanto I) que as transversais deverão ter para assegurar a estabilidade.

K pode ser interpretado como o coeficiente de elasticidade do apoio elástico fornecido às longitudinais, pelas transversais. Temos assim o problema reduzido ao estudo de uma viga (longitudinal) sujeita a apoios elásticos espaçados (transversais).

A solução desse caso é conhecida.⁽¹⁾ É obtida fazendo-se um estudo normal de viga contínua (teorema dos três momentos e equilíbrio dos apoios), com as modificações decorrentes da existência das forças compressivas. Essas modifica

ções são expressas por coeficientes multiplicativos que dependem da força compressiva através do parâmetro "u" já definido.

Obtido o sistema de equações válido para um vão genérico, procuram-se soluções que obedecem as condições de contorno. É preciso observar nesse ponto que a viga contínua como um todo deverá ser simplesmente apoiada nas extremidades, tendo em vista que só dessa maneira será possível ter-se uma idéia geométrica dos modos próprios e propor soluções compatíveis.

Substituídas as soluções e obedecidas as condições de contorno, obtém-se a expressão da elasticidade do apoio, com a condição de singularidade da matriz do sistema

$$K = \frac{\pi^4 E i_o}{l^3} \chi_j(\lambda) \quad (3.12)$$

onde:

$$\lambda = \frac{4 \mu^2}{\pi^2} = \frac{T}{\frac{\pi^2 E i_o}{l^2}} = \frac{T}{T_e} = \frac{\sigma}{\sigma_e} \quad (3.13)$$

$$\chi_j(\lambda) = a(u) \frac{\cos j \frac{\pi}{n} - \cos 2u}{\cos j \frac{\pi}{n} + b(u)} (1 - \cos j \frac{\pi}{n}) \quad (3.14)$$

onde

$$a(u) = \frac{2}{\pi} \frac{2u^3}{2u - \sin 2u}; \quad b(u) = \frac{\sin 2u - 2u \cos 2u}{2u - \sin 2u}$$

podemos ver de (3.14) que os $\chi_j(\lambda)$ podem ser calculados e tabelados em função de λ, j, n .

Onde: n é o número de apoios,

j é o número de "ondas" que a viga assume.

Assim sendo, se igualarmos (3.12) e (3.11) poderemos achar qual o momento de inércia das transversais que garanta a grelha contra a instabilidade até uma tensão de compressão σ .

$$I = \left(\frac{\pi}{\mu_1}\right)^4 \left(\frac{L}{L_0}\right)^3 \frac{L}{b} i_0 \chi_j(\lambda) \quad (3.15)$$

02 - Solução direta (utilizando transformada de Laplace).

Esse tipo de solução é proposto por Chang⁽²⁾.

Consta em se submeter o sistema desacoplado de equações diferenciais à substituição de Laplace. Após o que se pode impor as condições de contorno desejadas, sendo que a solução já as leva automaticamente em conta.

Restringir-nos-emos a citar o raciocínio e o método utilizados, enumerando alguns dos resultados bem como os limites de aplicabilidade do método.

As notações são estritamente as utilizadas por Chang⁽²⁾.

Suponha-se o eixo X correndo ao longo das transversais, e o eixo Y ao longo das longitudinais (comprimidas).

Seja $R_{i\alpha}$ a interação entre a i -ésima transversal e a α -ésima longitudinal, e P_α a força compressiva.

Tratando-se as vigas como livres e sujeitas às interações, tem-se:

$$E I_i w_{xxxx,i} = \sum_{\alpha=1}^m R_{i\alpha} \delta(x - x_\alpha) \quad (3.16)$$

para as transversais, e

$$E I_\alpha w_{yyyy,\alpha} + P_\alpha w_{yy,\alpha} + \sum_{i=1}^n R_{i\alpha} \delta(y - y_i) = 0 \quad (3.17)$$

para as longitudinais, onde

$$w_{xxxx} = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \text{ etc. ...}$$

$\delta(x)$ = função distribuição de Dirac.

Admite-se que todas as transversais tenham a mesma geometria, mudando eventualmente apenas as características seccionais. Nesse caso é possível pôr os coeficientes de influência das transversais na forma geral:

$$a_{\alpha\beta}^k = f_k a_{\alpha\beta} \quad (3.18)$$

onde f_k é um fator de escala. Portanto, admite-se que a deformação de todas as transversais tenha a mesma função de forma.

Por outro lado, considera-se que uma deflexão genérica num ponto de cruzamento de vigas, seja dada por:

$$w_{i\alpha} = a_{\alpha\beta} R_{i\beta} \quad (\text{soma em } \beta) \quad (3.19)$$

Considerando-se as longitudinais em conjunto tem-se

de (3.17) e (3.19)

$$|a_{\alpha\beta}| \{E I_{\beta} w_{yyyy,\beta} + P_{\beta} w_{yy,\beta}\} + \\ + \left\{ \sum_{i=1}^n w_{\alpha}(y_i) \delta(y - y_i) f_i \right\} = 0 \quad (3.20)$$

Por hipótese tôdas as longitudinais são iguais e igualmente carregadas; então

$$I_{\beta} = I_s \quad (\text{momento de inércia})$$

$$P_{\beta} = P \quad (\text{fôrça compressiva}).$$

(3.20) poderá ser desacoplada tomando-se

$$w_{\alpha} = u_{\alpha\beta} z_{\beta} \quad (3.21)$$

onde

$$|u|^T |a_{\alpha\beta}| |u| = |\lambda_{\alpha}| \quad (3.22)$$

$$|\lambda_{\alpha}| = \text{matriz diagonal dos autovalores de } |a_{\alpha\beta}|$$

$$|u_{\alpha\beta}| = \text{matriz unitária correspondente.}$$

Utilizando (3.22) e (3.21) em (3.20), tem-se

$$\lambda_{\alpha} EI z_{\alpha}^{(4)} + \lambda_{\alpha} P z_{\alpha}'' + \sum_{i=1}^n f_i z_{\alpha}(y_i) \delta(y - y_i) = 0 \quad (3.23)$$

(3.23) é um sistema com $\alpha = m$ (número de longitudinais) equações desacopladas.

É sugestão de Chang⁽²⁾ lançar mão do uso da transformada de Laplace para resolver as equações do tipo (3.23). De modo genérico (3.23) se modifica para (usando $K^2 = \frac{P}{EI}$)

$$Z_{\alpha}(s) = \frac{1}{s^4 + k^2 s^2} \left[(s^3 + k^2 s) Z(0) + (s^2 + k^2) Z'(0) + \right. \\ \left. + s Z''(0) + Z'''(0) - \frac{1}{\lambda_{\alpha} EI s} \sum_{i=1}^n f_i Z_{\alpha}(y_i) e^{-s y_i} \right] \quad (3.24)$$

Para introduzir as condições de contorno de determinado problema, utiliza-se $Z_{\alpha}(s)$ (de 3.24) e suas derivadas quando necessário.

Por exemplo, digamos que se queira determinar as constantes para longitudinais simplesmente apoiadas. Sabemos que

$$\begin{aligned} Z_{\alpha}(\ell) &= 0 \\ Z''_{\alpha}(\ell) &= 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Usa-se (3.24) com $s = \ell$, com $s = y_i$ ($i = 1, \dots, n$), e a derivada segunda de (3.24) com $s = \ell$ lembrando que

$$Z(0) = 0 \quad \text{e} \quad Z''(0) = 0$$

Assim procedendo obtêm-se um sistema de equações em $Z_{\alpha}(\ell)$, $Z'_{\alpha}(0)$, e $Z_{\alpha}(y_i)$ ($i = 1, \dots, n$), com $n+2$ incógnitas.

Para que exista a solução não trivial dêsse sistema é preciso que seu determinante seja nulo. É com base nessa condição, que se obtêm os valores de P_{cr} (carga de compressão crítica).

A vantagem dêsse método reside na possibilidade de inclusão das outras condições contorno, como por exemplo, en-

gastamento das longitudinais. Essas seriam expressas por

$$\begin{array}{rcl} z_{\alpha}(0) & = & 0 \\ z'_{\alpha}(0) & = & 0 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{rcl} z_{\alpha}(\ell) & = & 0 \\ z'_{\alpha}(\ell) & = & 0 \end{array}$$

ou ambas, se ambas as extremidades forem engastadas.

03 - Crítica às soluções teóricas.

As soluções apresentadas em 01. atendem, em grande parte, as exigências impostas a uma grelha substituta de convês. Permitem o estudo de grelhas com grande número de longitudinais e número razoável de transversais sujeitas a condições de contorno variadas. São vantajosas quanto à rapidez e mecanização dos cálculos, permitindo a obtenção de estimativas rápidas e pouco sujeitas a erros.

Não permite no entanto considerarem-se outras condições de contorno para as longitudinais, que não sejam as de apoio simples.

As soluções apresentadas em 02. são mais trabalhossas que as de 01., porém permitem a consideração de longitudinais engastadas, fato por vezes importante visto que uma grelha de convês é limitada por anteparas de grande rigidez que possibilitam o engastamento. No entanto a consideração de condições de engastamento parcial para as transversais é mais dificultosa visto que a matriz $|\lambda|$ dos autovalores dos coeficientes de influência das transversais foi calculada por

Chang⁽²⁾, para os casos simplesmente apoiado e engastado, e cada condição de engastamento parcial exigiria um recálculo total da matriz $|\lambda|$.

A maior desvantagem do método, reside, porém, nas limitações práticas da determinação dos zeros de um determinante de ordem superior a 3. De fato, para o caso de $n = 1$ transversal já teríamos um determinante de ordem $n + 2 = 3$. Para número maior de transversais o processo se dificultaria progressivamente. Nesses casos apenas uma estimativa do máximo valor de P_{cr} seria possível.

Em ambos (01. e 02.) é preciso observar, no entanto, certas condições que impossibilitam sua aplicação ao caso mais geral, como sejam:

- a - consideração da rigidez torcional das vigas bem como do efeito de cisalhamento;
- b - consideração de irregularidades do convês; aberturas assimétricas, longitudinais gigantes de borda de escotilha com secção prismática variável, pés de carneiro (pilares) suportes intermediários de longitudinais.

Tendo em vista a e b, procurou-se um processo mais geral, que tornasse possível a consideração desses fatores.

Tal processo se baseia na análise da estrutura pelo

método dos elementos finitos, que será exposto nos capítulos subsequentes.

* * *

CAPÍTULO IV

SOLUÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS

01 - Métodos matriciais de análise estrutural

Os métodos de solução até agora apresentados, tinham em comum a consideração da estrutura como composta de elementos (longitudinais e transversais) que constituíam um contínuo de comportamento não linear (geomêtricamente).

Daqui em diante basearemos a nossa análise na consideração de elementos suficientemente pequenos e com características elásticas e seccionais conhecidas, que podem ser considerados de comportamento linear, e substituem geométrica e mecanicamente a estrutura de comportamento não linear.

A tradução matemática dessa técnica é a expressão das características de resposta dos elementos discretos em forma matricial, após o que a característica da estrutura como um todo, é obtida pela montagem dos blocos matriciais dos elementos.

02 - Idealização estrutural

Para a utilização de métodos matriciais é preciso formular um modelo matemático conveniente, representativo do elemento discreto de modo que este se comporte de maneira semelhante ao contínuo de que é representante. Ao se fazer es-

sa formulação, a estrutura poderá ser representada através de um número finito de graus de liberdade aos quais os métodos matriciais são aplicáveis.

O modelo matemático é obtido igualando-se a energia do sistema discreto à do contínuo, que representa.

Quando a interligação dos elementos estruturais se fizer em número discreto de pontos (nós, juntas), as interações poderão ser representadas por forças e deslocamentos nodais, e nesse caso as características elásticas dos elementos podem ser determinadas de modo exato, sem a necessidade de aproximações. As interações entre os vários elementos estruturais são representadas pelas ações nodais (forças normais e cisalhantes, e momentos fletores e torçores).

03 - Analogia entre elemento de grelha e elemento representativo de estrutura de convês.

O nosso estudo visa a estabilidade de estruturas de convês, representáveis por grelhas abertas sob determinadas condições (II - 02). É preciso lembrar que existe o chapeamento mútuo para tôdas as vigas, o qual impede deflexões flexionais bem como deslocamentos em seu próprio plano; portanto, de uma estrutura espacial com elementos possuindo doze graus de liberdade, podemos nos descartar de um deslocamento angular (normal ao convês) e de dois deslocamentos lineares (coplanares ao convês) em cada nó, reduzindo-os a dois

deslocamentos angulares coplanares e um deslocamento linear normal ao plano do convés.

Esse modelo corresponde exatamente ao elemento de grelha utilizado nos métodos matriciais. Portanto, a despeito da existência de forças coplanares, poderemos analisar a estrutura, como sendo uma grelha convencional sujeita apenas a esforços laterais, cujo elemento típico é mostrado na Fig. 4.1.

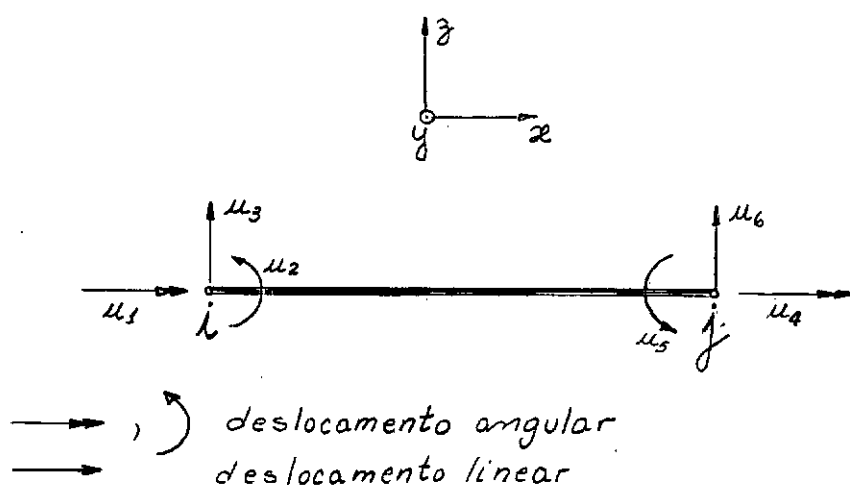


Fig. 4.1

É preciso, no entanto, citar algumas restrições e cuidados que deverão ser tomados na escolha e caracterização dos elementos.

a) De modo geral podem-se escolher como elementos estruturais, a porção de longitudinais e transversais compreendidas entre dois nós. No entanto, para o estudo da estabilidade é preciso prever o tipo de instabilidade que implica na maior rigidez possível das transversais e corresponde ao

caso em que $\lambda = 1$ (III - 01), quando as longitudinais assumem um número de "ondas" igual ao de espaçamentos nelas determinados pelas transversais. Nesse caso, cada porção entre dois nós ficará ela própria instável e não mais preencherá o requisito de linearidade de ações e respostas. Para evitar essa situação divide-se a porção das longitudinais compreendida entre duas interseções, em número maior de elementos estruturais. Pode-se ver pela observação da fórmula de Euler para uma coluna, que a divisão à metade do comprimento total, aumenta de quatro vezes a carga de flambagem; portanto, admitir-se dois elementos estruturais entre cada par de interseções das longitudinais é aproximação bastante aceitável para que se possa continuar aplicando as hipóteses de linearidade de ações e respostas.

b) Os momentos de inércia à torção (J_t) dos elementos deverão ser escolhidos lembrando que existe um encastramento mútuo, que apresenta maior resistência às deflexões torcionais, que a viga separada.

c) Uma viga livre que sofre torção não mantém paralelos os planos transversais que contêm as secções de extremidade. Mas quando ela faz parte de um reticulado, essa deplanação das secções extremas é impedida pelo restante da estrutura, provocando o surgimento de um momento fletor adicional, que aumenta sua rigidez. Portanto, ao se obter um resultado em que foi levado em conta o efeito torcional das vigas, é preciso

so ter-se em mente que se trata de um valor aproximado a favor da segurança, e que ainda existe alguma reserva na estrutura..

04 - Características elásticas e inerciais de um elemento típico de grelha.

a) Precisamos, de início, optar pelo método de análise a utilizar.

Temos à nossa disposição o método das forças - no qual se estuda os deslocamentos sofridos por um corpo quando sujeito a uma força unitária, e o método dos deslocamentos, que a um deslocamento unitário de um ponto genérico de um corpo, estuda as forças que nêle se manifestam.

O método das forças é mais intuitivo, pois corresponde ao estudo que se faz: ao aplicar a teoria elementar da resistência dos materiais e, em se tratando de estrutura hiperestática não demasiado complexa, é fácil e rapidamente aplicável.

Para estruturas hiperestáticas e mais complexas, há a necessidade de se introduzir diversos cortes fictícios (em número igual ao grau de hiperestaticidade), seguindo-se um trabalho matricial bastante extenso.

Porém, a principal razão para o abandono do método das forças é a natureza do problema que pretendemos resolver.

De fato, a grande vantagem do método das forças reside na obtenção direta dos esforços sobre os elementos, sem que seja necessário o cálculo dos deslocamentos. No nosso caso, porém, o importante é conhecer não as ações decorrentes da aplicação de determinado carregamento, mas o comportamento geométrico da estrutura (deslocamentos). Para isso, o método dos deslocamentos, além de simplificar o trabalho matricial, possibilita soluções diretas.

b) Elemento estrutural (unidimensional) de grelha sujeita a forças compressivas.

Como já citado, o elemento estrutural de nosso estudo possui seis graus de liberdade e está sujeito a forças compressivas. (Fig. 4.2).

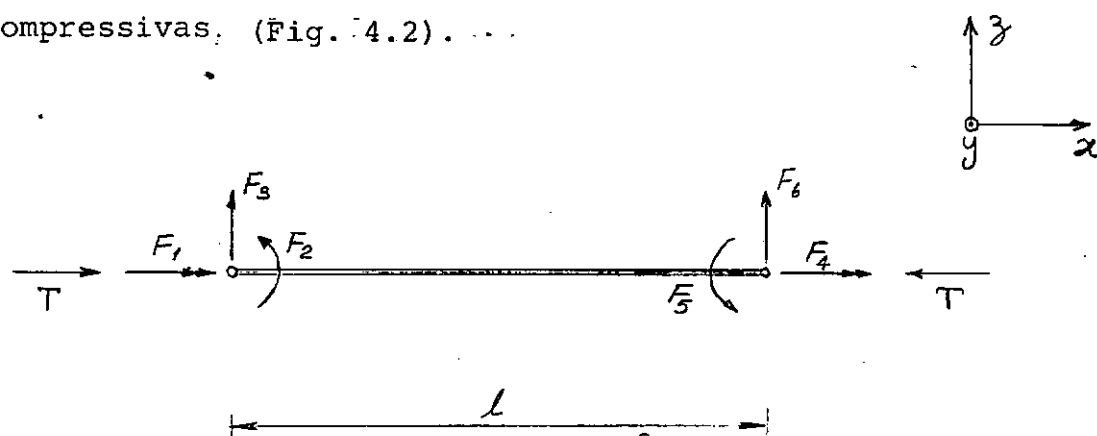


Fig. 4.2

Dentro de uma teoria linearizada de estabilidade (que é o objeto de nosso estudo) podemos admitir que os deslocamentos laterais da estrutura sejam tão pequenos que a força compressiva não dependa deles, ou seja, T deverá ser consi-

derada constante no cálculo da matriz de resposta dos elementos estruturais.

Por outro lado, também serão consideradas desprezíveis as elongações axiais da viga perfeitamente reta, face à magnitude da componente das deformações laterais na direção axial. Portanto, podemos pôr as elongações axiais na forma:

$$\delta \ell = \int_0^{\ell} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} dx - \ell \quad (4.1)$$

adotando o desenvolvimento binomial de Newton e desprezando termos de ordem superior a $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$ obtemos

$$\delta \ell = \int_0^{\ell} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right) dx - \ell = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx \quad (4.2)$$

Em (4.2) temos portanto as elongações axiais do elemento estrutural em função exclusivamente dos deslocamentos laterais.

c) Determinação das características de resposta do elemento estrutural em relação a um sistema local de coordenadas.

Em nosso estudo, queremos um modelo que represente com a maior fidelidade possível o comportamento da estrutura real. Para isso lançaremos mão de uma teoria um pouco mais apurada que a usual nesses casos incluindo efeitos torcionais e de cisalhamento.

A matriz de resposta de um elemento (matriz de rigidez) pode, pela sua própria definição, ser obtida consideran-

do-se a parte da energia potencial total que depende exclusivamente das características que ligam um deslocamento genérico do elemento, aos deslocamentos nodais u_i .

De modo geral, podemos pôr os deslocamentos laterais e torcionais em função dos deslocamentos nodais, como se já:

$$\begin{bmatrix} w(x) \\ \phi(x) \\ \theta(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_w(\xi) \\ N_\phi(\xi) \\ N_\theta(\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

onde:

$$N_w(\xi) = \frac{1}{1+\Phi} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & [\xi - 2\xi^2 + \xi^3 + \frac{1}{2}(\xi - \xi^2)\Phi] \ell \\ 3 & 4 \\ 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 + (1-\xi)\Phi & 0 \\ 5 & [-\xi^2 + \xi^3 - \frac{1}{2}(\xi - \xi^2)\Phi] \ell \\ 6 & 3\xi^2 - 2\xi^3 + \xi\Phi \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$N_\phi(\xi) = \frac{1}{\ell(1+\Phi)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & [1 - 4\xi + 3\xi^2 + (1-\xi)\Phi] \ell & 6(-\xi + \xi^2) \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & [-2\xi + 3\xi^2 + \xi\Phi] \ell & 6(\xi - \xi^2) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$N_\theta(\xi) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 - \xi & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

com $\xi = \frac{x}{\ell}$.

Ver apêndice I, Przemieniecki (3).

Assim sendo, a energia potencial total do elemen-

to, incluindo-se efeitos de cisalhamento e dada por:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L E I \phi'^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L G A_s (\dot{w}' - \phi)^2 dx + \\ + \frac{1}{2} \int_0^L G J_t \theta'^2 dx - \frac{T}{2} \int_0^L w'^2 dx \quad (4.7)$$

onde se usou $\phi = \phi(x)$, $w = w(x)$, etc. Os primeiros dois termos são responsáveis pela porção da energia potencial devida à rigidez do elemento de viga com efeito de cisalhamento incluído.

O terceiro termo responde pela parcela armazenada devido à torção. E o quarto termo representa a redução dessa energia potencial quando T é uma força de tração.

Se quisermos então obter a matriz de resposta do elemento, basta isolar em (4.7) os termos proporcionais a

$$\{u\} = \{u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ u_6\} \quad (4.8)$$

Substituindo (4.3) em (4.7) vem

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L E I |u|^T |N'_\phi|^T |N'_\phi| |u| dx + \\ + \frac{1}{2} \int_0^L G A_s |u|^T |N'_w - N'_\phi|^T |N'_w - N'_\phi| |u| dx + \\ + \frac{1}{2} \int_0^L G J_t |u|^T |N'_\theta|^T |N'_\theta| |u| dx + \\ - \frac{T}{2} \int_0^L |u|^T |N'_w|^T |N'_w| |u| dx \quad (4.9)$$

onde se usou $N_\phi = N_\phi(\xi)$, $N_w = N_w(\xi)$, etc.

Em (4.9), $|u|$ e $|u|^T$ representam apenas valores genéricos de deslocamentos nodais; portanto, podemos pôr:

$$V = \frac{1}{2} |u|^T \{ EI \int_0^L |N'_\phi|^T |N'_\phi| dx + GA_S \int_0^L |N'_w - N'_\phi|^T |N'_w - N'_\phi| dx + \\ + G J_t \int_0^L |N'_\theta|^T |N'_\theta| dx - T \int_0^L |N'_w|^T |N'_w| dx \} |u| \quad (4.10)$$

O fator da energia potencial compreendido entre as chaves corresponde à razão de proporcionalidade entre um deslocamento genérico (w, ϕ, θ) e os deslocamentos nodais, portanto a matriz de resposta de um elemento genérico é dada por:

$$k = EI \int_0^L |N'_\phi|^T |N'_\phi| dx + GA_S \int_0^L |N'_w - N'_\phi|^T |N'_w - N'_\phi| dx + \\ + GJ_t \int_0^L |N'_\theta|^T |N'_\theta| dx - T \int_0^L |N'_w|^T |N'_w| dx \quad (4.11)$$

resolvendo as integrais de (4.11) (ver Apêndice II), obtém-se a matriz de resposta, referida ao sistema local de coordenadas, na forma:

$$k = k_R + k_G \quad (4.12)$$

onde k_R e k_G estão representadas nas tabelas 4.1 e 4.2 e são respectivamente a matriz de rigidez e matriz geométrica de um elemento de grelha com efeito de cisalhamento incluído.

d) Características de resposta de um elemento estru

$k_R =$

$\frac{G J_t}{\ell}$					
0	$\frac{(4+\phi) E I}{(1+\phi) \ell}$				
0	$\frac{6 E I}{(1+\phi) \ell^2}$	$\frac{12 E I}{(1+\phi) \ell^3}$			
$-\frac{G J_t}{\ell}$	0	0	$\frac{G J_t}{\ell}$		
0	$\frac{(2-\phi) E I}{(1+\phi) \ell}$	$\frac{6 E I}{(1+\phi) \ell^2}$	0	$\frac{(4+\phi) E I}{(1+\phi) \ell}$	
0	$-\frac{6 E I}{(1+\phi) \ell^2}$	$-\frac{12 E I}{(1+\phi) \ell^3}$	0	$-\frac{6 E I}{(1+\phi) \ell^2}$	$\frac{12 E I}{(1+\phi) \ell^3}$

S I M É T R I C A

TABELA 4.1

$$k_G = - \frac{T}{(1+\Phi)^2}$$

0						
0	$\ell \left(\frac{2}{15} + \frac{\Phi}{6} + \frac{\Phi^2}{12} \right)$					
0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{\ell} \left(\frac{6}{5} + 2\Phi + \Phi^2 \right)$				
0	0	0	0			
0	$-\ell \left(\frac{1}{30} + \frac{\Phi}{6} + \frac{\Phi^2}{12} \right)$	$\frac{1}{10}$	0	$\ell \left(\frac{2}{15} + \frac{\Phi}{6} + \frac{\Phi^2}{12} \right)$		
0	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{\ell} \left(\frac{6}{5} + 2\Phi + \Phi^2 \right)$	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{\ell} \left(\frac{6}{5} + 2\Phi + \Phi^2 \right)$	

S I M É T R I C A

TABELA 4.2

Local em relação a um sistema global de coordenadas.

É preciso, para a montagem da matriz global de rigidez (ver IV - 05), conhecer-se as características de resposta de um elemento genérico, em relação a um sistema global de coordenadas.

Como as matrizes k_R e k_G foram referidas a um sistema local convenientemente escolhido para simplificar a computação (Fig. 4.2), é preciso encontrar um meio de representá-las em relação a um sistema global.

Em IV-04, b) a energia potencial total do elemento foi representada na equação (4.10) por

$$V = \frac{1}{2} |u|^T |k| |u| \quad (4.14)$$

onde $|u|$ é a matriz coluna dos deslocamentos nodais.

Obviamente o valor da energia potencial total não se altera face a uma mudança de referencial, portanto se conhecermos a relação entre os deslocamentos no sistema global e local, poderemos achar a forma modificada da matriz de rigidez por simples substituição.

Projetemos os deslocamentos do sistema local na direção dos deslocamentos do sistema global. Então teremos

$$|u| = |R| |\bar{u}| \quad (4.15)$$

onde $|R|$ é a matriz de relacionamento entre $|u|$ e $|\bar{u}|$,

cujos termos, como será visto para o nosso caso particular de grelha, são os cossenos diretores entre as direções dos deslocamentos no sistema local e global de coordenadas.

Substituindo (4.15) em (4.14) vem

$$V = \frac{1}{2} |\bar{u}|^T |R|^T |k| |R| |\bar{u}| \quad (4.16)$$

Portanto

$$|\bar{k}| = |R|^T |k| |R| \quad (4.17)$$

e) Forma da matriz $|R|$ para o caso de grelha.

Na Fig. 4.3 está mostrado o elemento típico de grelha com deslocamentos nodais referidos a ambos os sistemas de coordenadas.

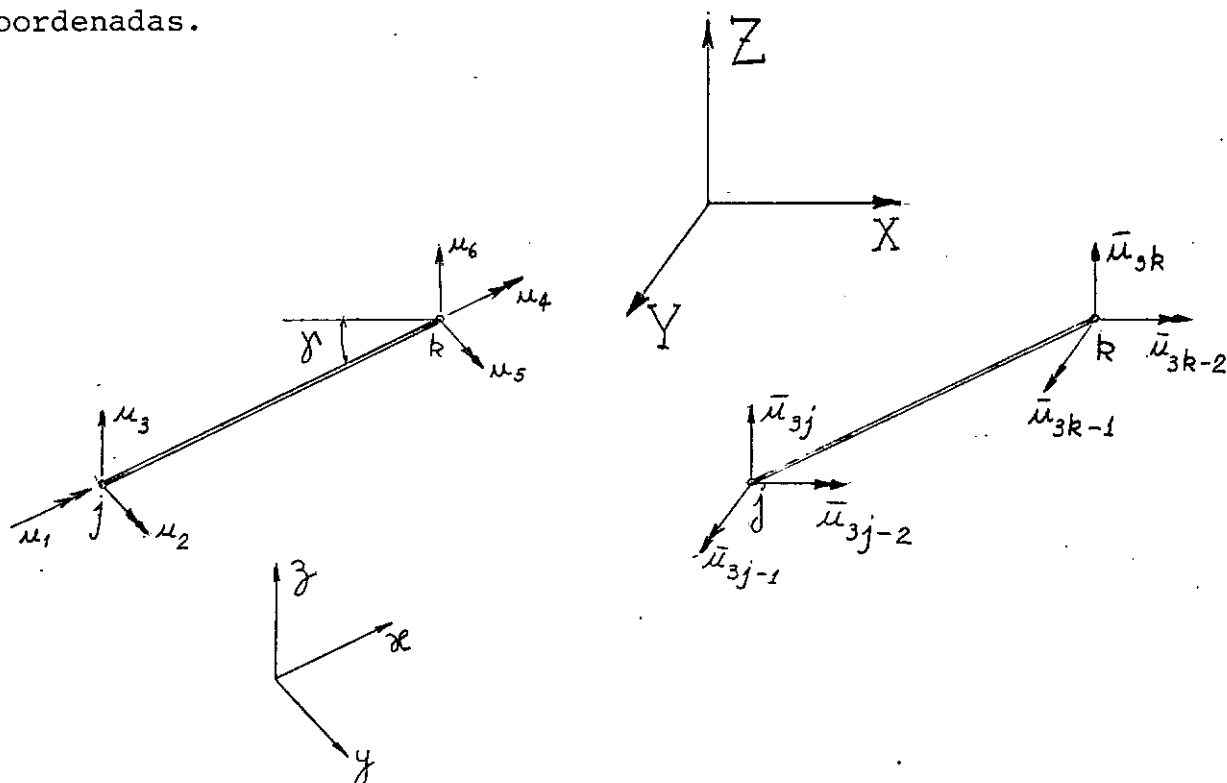


Fig. 4.3

Pode-se observar que os eixos Z, z de ambos os referenciais são paralelos.

Os deslocamentos no sistema local podem ser relacionados aos do sistema global pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \bar{u}_{3j-2} C_x - \bar{u}_{3j-1} C_y \\
 u_2 &= \bar{u}_{3j-2} C_y + \bar{u}_{3j-1} C_x \\
 u_3 &= \bar{u}_{3j} \\
 u_4 &= \bar{u}_{3k-2} C_x - \bar{u}_{3k-1} C_y \\
 u_5 &= \bar{u}_{3k-2} C_y + \bar{u}_{3k-1} C_x \\
 u_6 &= \bar{u}_{3k}
 \end{aligned}
 \tag{4.18}$$

onde: $C_x = \cos \gamma$
 $C_y = \sin \gamma$

ou sob forma matricial:

$$\begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_x & -C_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_y & C_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_x & -C_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_y & C_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{u}_{3j-2} \\ \bar{u}_{3j-1} \\ \bar{u}_{3j} \\ \bar{u}_{3k-2} \\ \bar{u}_{3k-1} \\ \bar{u}_{3k} \end{vmatrix}
 \tag{4.19}$$

05 - Características inerciais e elásticas da estrutura montada.

Conhecidas as características de resposta de elementos estruturais genéricos de grelha sujeitos a esforços compressivos muito inferiores aos níveis de instabilidade, resta

achar-se um meio de combinar tais características individuais para obter a resposta da estrutura global, idealmente dividida em elementos desse tipo.

Pretende-se, em outras palavras, achar um meio que permita combinar as matrizes de resposta dos elementos, de forma a se obter a equação matricial que relaciona forças externas aplicadas à estrutura global, com os deslocamentos por esta sofridos.

A hipótese fundamental, portanto, consiste em se assumir que a estrutura global possa ser convenientemente representada por um conjunto de elementos discretos com propriedades elásticas e inerciais simplificadas, interligados em número finito de pontos. Os deslocamentos nas extremidades dos elementos deverão ser compatíveis nos pontos nodais (junção de elementos) e as tensões no interior de cada elemento são equilibradas pelas forças $\bar{F}^{(i)}$ que agem nas direções dos deslocamentos $\bar{u}^{(i)}$. As forças são relacionadas aos respectivos deslocamentos pela equação matricial:

$$\bar{F}^{(i)} = \bar{k}^{(i)} \bar{u}^{(i)} + \bar{Q}^{(i)} \quad (4.20)$$

onde $\bar{Q}^{(i)}$ são as forças externas.

A razão dos sobrescritos reside na necessidade de se ter uma indicação de qual elemento está sendo considerado (i) bem como de relacionar as características de resposta do elemento a um sistema global de coordenadas.

A equação (4.20) pode ser determinada para cada elemento em separado, e a combinação das equações de todos os elementos, resulta numa única equação matricial do tipo:

$$\bar{F} = \bar{k} \bar{u} + \bar{Q} \quad (4.21)$$

onde

$$\bar{F} = \{ \bar{F}^{(1)} \quad \bar{F}^{(2)} \quad \dots \quad \bar{F}^{(i)} \quad \dots \}$$

$$\bar{k} = \{ \bar{k}^{(1)} \quad \bar{k}^{(2)} \quad \dots \quad \bar{k}^{(i)} \quad \dots \}$$

$$\bar{u} = \{ \bar{u}^{(1)} \quad \bar{u}^{(2)} \quad \dots \quad \bar{u}^{(i)} \quad \dots \}$$

$$\bar{Q} = \{ \bar{Q}^{(1)} \quad \bar{Q}^{(2)} \quad \dots \quad \bar{Q}^{(i)} \quad \dots \}$$

{ } é a notação de matriz coluna.

\bar{Q} é a matriz das forças externas agentes sobre a estrutura. No nosso caso, como só existem forças de compressão (as quais não são consideradas como carregamento) a equação (4.21) se reduz a:

$$\bar{F} = \bar{k} \bar{u} \quad (4.22)$$

Resta agora relacionar os deslocamentos individuais das extremidades de cada elemento, com os deslocamentos globais da estrutura. Para isso introduz-se a matriz dos deslocamentos da estrutura montada

$$U = \{ U_1 \quad U_2 \quad \dots \quad U_j \quad \dots \quad U_m \} \quad (4.23)$$

onde m é o número de deslocamentos possíveis da estrutura global e U_j é um desses deslocamentos referido a um sistema global de coordenadas.

Se conseguirmos relacionar os deslocamentos do elemento aos da estrutura, poderemos estudar a estrutura como um todo da mesma maneira simplificada.

Embora não pretendendo adotar o processo de relacionamento descrito a seguir, apresentamo-lo para dar maior clareza e generalidade à nossa exposição.

Se elemento estrutural e estrutura forem relacionados ao mesmo sistema de coordenadas, fica claro que a cada deslocamento de extremidade de um elemento estrutural genérico vai corresponder apenas um deslocamento nodal global, ao passo que a cada deslocamento global poderão corresponder um ou mais deslocamentos de extremidade de elementos.

Assim, podemos relacionar $|u|$ e $|U|$ através de uma matriz retangular A de linhas formadas por zeros, excepto por um elemento unitário que corresponde ao deslocamento nodal global relacionado univocamente ao deslocamento nodal local procurado. Vem:

$$\bar{u} = A U \quad (4.24)$$

quê representa os deslocamentos nodais locais em função dos deslocamentos nodais globais.

Igualmente ao que se fêz para o elemento individual seja

$$P = \{P_1, P_2, \dots, P_j, \dots, P_m\} \quad (4.25)$$

o carregamento que provoca os deslocamentos U . Onde P_j é a força generalizada agente na direção do deslocamento generalizado U_j .

O relacionamento de P e U é dado pela matriz global de rigidez K que estamos procurando.

Podemos obtê-la de várias maneiras, uma delas sendo igualar os trabalhos realizados pelas forças nodais locais (no elemento) e pelas forças nodais globais, contra um deslocamento infinitesimal δU .

Esse procedimento corresponde à imposição das condições de compatibilidade de deslocamentos nas extremidades dos elementos.

Os deslocamentos infinitesimais sofridos pelas extremidades dos elementos são obtidos de (4.24):

$$\delta \bar{u} = A \delta U \quad (4.26)$$

O trabalho realizado pelas forças nodais globais contra δU é dado por:

$$\delta W_g = \delta U^T P \quad (4.27)$$

Do mesmo modo, o trabalho realizado pelas forças nodais locais contra os deslocamentos δu é dado por

$$\delta W_l = \sum_i |\delta \bar{u}^{(i)}|^T \bar{F}^{(i)} = \delta \bar{u}^T \bar{F} \quad (4.28)$$

Como os trabalhos realizados deverão ser os mesmos

de m é o número de deslocamentos possíveis da estrutura montada, e n a soma dos deslocamentos possíveis de cada membro), é necessário evitar esse produto de matrizes.

Por outro lado, é preciso notar que com o raciocínio aqui apresentado, a matriz global de rigidez K representa o modo de resposta de um corpo livre, visto que nenhuma restrição relativa a reações de apoio foi feita até agora. Isso significa que, na ausência de forças externas, a matriz P das ações corresponde a um conjunto de forças em equilíbrio. Porém, como nesse conjunto estão incluídas as reações de apoio (por apoio entende-se restrição a um grau de liberdade), conclui-se que algumas dessas forças não serão independentes e consequentemente a matriz global de rigidez K é singular pois seu determinante possui filas linearmente dependentes. Para superar a singularidade, essas filas precisam ser eliminadas da matriz de rigidez.

O processo lógico simultâneo de montagem, a partir das matrizes locais $\bar{k}^{(i)}$, da matriz global de rigidez K já na forma destituída das filas correspondentes aos apoios será exposto no Capítulo V.

Convenções: Daqui por diante, quando nos referirmos à matriz global de rigidez K entenda-se que é na forma reduzida (não singular).

06 - Equação de instabilidade da estrutura global

Até este ponto, estudamos a resposta de uma grelha admitindo comportamento linear (relação (4.31)), ou seja, ações e deformações consideradas pequenas.

Interessa-nos, no entanto, conhecer o ponto em que ocorre a instabilidade da grelha, sujeita a esforços compressivos externos, que sabemos ser um caso particular de flexão composta. As deformações vinculadas a esse tipo de ação, são de ordem de grandeza apreciável em relação às dimensões da estrutura. Devido a isso não podemos mais supor comportamento linear.

Devemo-nos ocupar de dois tipos de não linearidade:

a - Geométrica: sendo as deformações apreciáveis, as forças compressivas contribuem para a flexão do conjunto.

Esse efeito está sendo levado em conta para cada elemento através da matriz geométrica $\bar{k}_G^{(i)}$, cujo valor é proporcional à força compressiva T .

b - Material: devido às apreciáveis deflexões, a grelha pode chegar a trabalhar fora dos limites elásticos, e portanto as características elásticas não podem ser consideradas constantes.

Esse efeito será levado em conta de modo iterativo. Em primeiro lugar determina-se qual a tensão de instabilidade da grelha considerada em regime elástico até a flambagem. Com

êsse valor de tensão determina-se até onde foi excedido o limite elástico. Mudam-se as características elásticas do material de acôrdo com dados obtidos da experimentação e repete-se o procedimento descrito, até obter uma diferença desprezível de tensão em dois passos subsequentes.

Feitas essas observações, passemos ao estudo da instabilidade.

Com vista em (4.12), a matriz de resposta do elemento genérico se compõe de duas outras, uma correspondendo exatamente à matriz de rigidez usual do elemento, a outra proporcional às forças compressivas.

Por um processo semelhante ao adotado em IV-05, podemos obter as características da estrutura montada como (ver 4.31)

$$P = |K_R + K_G| U \quad (4.33)$$

Queremos o valor de T que corresponde à flambagem. Se aumentarmos gradativamente as forças compressivas, chegaremos a êsse valor.

Seja λ um parâmetro em proporção ao qual queremos que o valor da força compressiva externa aumente. De (4.33) vem:

$$|K_R + \lambda K_G^*| U = \lambda P^* \quad (4.34)$$

onde

$$P = \lambda P^* \quad (4.35)$$

com λ constante e P^* representando as magnitudes relativas das forças aplicadas. Como K_G é proporcional às forças internas anteriores a um aumento no carregamento, vem:

$$K_G = \lambda K_G^* \quad (4.36)$$

com K_G^* matriz geométrica para valores unitários de carga aplicada ($\lambda = 1$).

Se utilizarmos um processo de aumento gradativo da carga, poderemos sempre determinar qual a deformação incremental a cada passo através de

$$U = [K_R + \lambda K_G^*]^{-1} \lambda P^* \quad (4.37)$$

Seguindo com esse raciocínio, podemos afirmar que a flambagem ocorre quando os deslocamentos U forem infinitos.

Da definição de matriz inversa conclui-se que o determinante

$$\|K_R + \lambda K_G^*\| = 0 \quad (4.38)$$

O menor valor de λ que satisfizer à equação (4.38) é o primeiro valor em que a grelha se torna instável. Conhecido esse valor podemos obter o valor crítico da força compressiva. O modo de resolver o problema posto em (4.38) será explicitado no Capítulo V.

* * *

CAPÍTULO V

PROCEDIMENTO LÓGICO E NUMÉRICO NA SOLUÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS

Pretendemos neste capítulo apresentar um processo geral de solução, utilizando conhecimentos dos capítulos anteriores, com vistas ao uso de computadores digitais.

Apresentaremos o processo em blocos independentes, cada qual imaginado para integrar um diagrama de blocos final, com base no qual será feita a listagem de instruções para o computador.

01 - Identificação da estrutura

Utilizaremos um sistema global de coordenadas, em relação ao qual serão referidos os nós (extremidades de elementos) da estrutura. Esse sistema, composto por 3 eixos coordenados conterá a grelha no plano XY, servindo o eixo Z para a determinação dos deslocamentos lineares sofridos pela estrutura (Fig. 5.1).

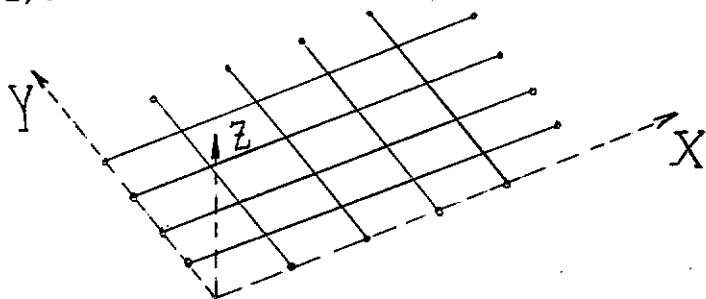


Fig. 5.1

A estrutura será identificada através dos elementos em que foi dividida.

De cada elemento deverão ser dados: numeração e coordenadas dos nós, e características elásticas e inerciais - módulos de elasticidade, área de compressão (se houver), momentos de inércia a flexão e torção, área que resiste ao cisalhamento.

Os comprimentos e cossenos diretores são dados superabundantes, pois podem ser gerados do seguinte modo:

Sejam x_j y_j e x_k y_k as coordenadas dos nós j e k no sistema global de coordenadas.

O comprimento do elemento, é dado por:

$$\ell = \sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2}$$

O cosseno diretor com o eixo x por:

$$C_X = \frac{x_k - x_j}{\ell}$$

O cosseno diretor com o eixo y por

$$C_Y = \frac{y_k - y_j}{\ell}$$

02 - Processo de numeração dos nós

Teoricamente, a numeração dos nós pode ser arbitrária, porém, devido às limitações dos computadores disponíveis

veis, deveremos escolher uma numeração que minimize a diferença dos dois nós do mesmo elemento. Esse procedimento permitirá obter uma matriz de resposta do tipo cinta, e quanto menor for a diferença da numeração nodal, tanto menor será a largura da cinta. Como será visto adiante, isso é vital para a solução do problema.

03 - Condições de contorno e graus de liberdade

Conhecida a geometria da estrutura é preciso dar algumas indicações quanto à cinemática.

Como foi visto anteriormente, uma estrutura do tipo estudado necessita no mínimo de três restrições independentes ao movimento como corpo rígido. No caso geral, no entanto, sempre há um número maior de restrições.

O significado matemático de uma restrição em determinado nó é a exclusão do efeito do elemento, na direção da restrição, quando se monta a matriz global de resposta.

Portanto, podemos representar a existência ou não de uma restrição, através de um par de variáveis lógicas. Por exemplo: 0 (zero) quando o deslocamento estiver restrito; 1 (um) quando o deslocamento for livre. Dêsse modo, a característica de uma restrição, ou da ausência de uma restrição pode ser representada por meio de números, à leitura dos quais se saberá se incluir ou não um termo de rigidez de determina-

do elemento na matriz global de rigidez.

Seguê-se um exemplo para esclarecer êsse raciocínio.

Seja uma viga semi-engastada em uma extremidade, e simplesmente apoiada (articulada) na outra (Fig. 5.2).

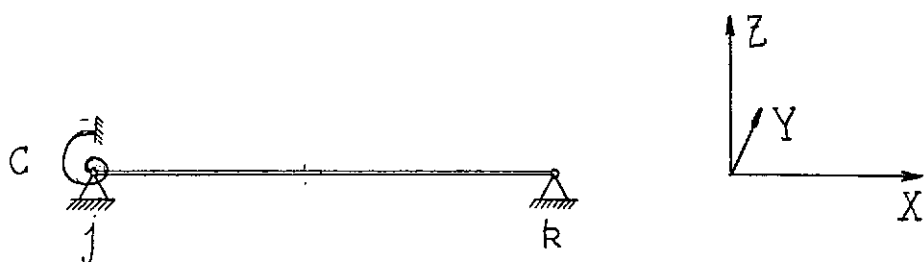


Fig. 5.2

O nó k é facilmente analisável: nas direções X e Z o deslocamento é impedido, portanto a variável lógica será 0 (zero). Na direção Y a rotação é livre e, portanto, a variável lógica será 1 (um).

Para o nó j , a situação é a mesma, com uma diferença, que é o engastamento elástico na direção Y cuja constante de mola é C .

A inclusão do efeito de engastamentos ou apoios elásticos é feita somando-se o valor da constante de mola diretamente ao termo que corresponde ao deslocamento considerado, na diagonal principal da matriz de rigidez, desde que esteja nas mesmas unidades dos demais termos da matriz.

Portanto, quando houver apoios ou engastamentos, elásticos, tudo se passa como se o deslocamento fôsse livre , sendo apenas necessário fornecer-se a constante de mola do apoio.

O fato de se acrescentar essa constante diretamente a um termo da diagonal principal é facilmente explicável. Por definição, o elemento k_{Rij} da matriz de rigidez é a força que surge na direção do deslocamento i quando se provoca um deslocamento unitário na direção do deslocamento j . Portanto, sendo a constante de mola a força que surge na mola imaginária restritiva de um deslocamento ao se provocar um deslocamento unitário na mesma direção, o termo afetado da matriz de rigidez será do tipo k_{Rii} e, portanto, pertencente à diagonal principal.

Ao fornecermos as variáveis lógicas e constantes de mola (onde os houver) de todos os deslocamentos, estaremos com as condições cinemáticas da estrutura completamente determinadas.

04 - Numeração dos graus de liberdade - deslocabilidades - da estrutura global, e número total de graus de liberdade.

Com a atribuição dos números lógicos escolhidos - 1 (um) para deslocamento possível e 0 (zero) para deslocamento restrito - podemos, de maneira muito simples, numerar os deslocamentos efetivos (graus de liberdade) da estrutura.

É preciso observar que, em se tratando de uma grelha, cada nó terá três deslocabilidades. Por deslocabilidade entendemos um deslocamento possível. Tal deslocamento, sendo restrito, se houver um vínculo que o impeça, e livre (efetivo) em caso contrário.

Se percorrermos os nós da estrutura na ordem em que foram numerados (crescente ou decrescente) e em cada nó os deslocamentos possíveis na sequência X, Y, Z dos eixos, poderemos atribuir números a cada deslocabilidade da estrutura de maneira ordenada.

O critério de numeração será uma variável lógica, atribuída a cada deslocamento possível, com a seguinte característica:- é a soma dos números lógicos até um determinado deslocamento, percorrida a estrutura como indicada acima.

Naturalmente, a cada deslocamento efetivo a variável lógica correspondente tomará um valor característico e único, ao passo que a cada deslocamento ou deslocamentos impedidos a variável lógica terá o valor que possuía no deslocamento livre imediatamente precedente.

Fazendo uso conjunto da variável e número lógico de cada deslocabilidade teremos numeração e descrição.

O número total de deslocamentos possíveis será o valor assumido pela variável após percorrida toda a estrutura.

05 - Elementos estruturais que influenciam cada grau de liberdade (tabela de relacionamento)

Os elementos da matriz global de rigidez são interpretáveis como as forças que surgem em determinados elementos estruturais, quando se provoca um deslocamento unitário em um nó, mantendo bloqueados os demais. Ora, é fácil ver que apenas sofrerão ações os elementos que concorrem no nó deslocado.

É preciso, portanto, a cada grau de liberdade efetivo (ao qual vão corresponder uma linha e coluna simétricas da matriz de rigidez) associar os elementos que nele concorrem (ou seja, que concorrem no nó ao qual esse grau de liberdade pertence).

Dêste modo, poderemos calcular qualquer elemento da matriz de rigidez, independentemente.

A importância disto será vista a seguir, quando forem feitas considerações sobre as dimensões das matrizes de rigidez cujos autovalores se pretende calcular.

06 - Matriz indexal - lógica de relacionamento entre os elementos das matrizes de rigidez individuais $\bar{k}^{(i)}$ e a matriz global de rigidez K .

Como sugerido no final de IV-05, mostraremos aqui uma das maneiras de evitar o duplo produto matricial (4.26).

Admita-se que todos os deslocamentos efetivos da estrutura tenham sido numerados (ver V-04). Teremos, então, uma descrição (em determinada sequência) das deslocabilidades dos nós.

Por outro lado, sabemos que cada elemento (no nosso caso) possui seis deslocabilidades possíveis. Poderemos, então, relacionar cada uma dessas seis deslocabilidades de cada elemento às deslocabilidades da estrutura global.

Esse relacionamento poderá ser efetuado com maior eficiência pelo uso de uma tabela composta por seis colunas, cada qual correspondente a uma deslocabilidade do elemento estrutural genérico. Cada linha dessa tabela corresponderá a um elemento estrutural.

Os elementos da tabela serão os números das deslocabilidades da estrutura determinados como em (V-04).

ELEMENTO DA ESTRUTURA	DESLOCABILIDADES DO ELEMENTO					
	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
1	0	3	0	0	4	5
2	0	17	0	0	18	19
3	0	4	5	6	7	8
4	0	18	19	20	21	22

Exemplo: ao deslocamento u_2 do elemento 2 corresponde o deslocamento global 17.

TABELA 5.1

A cada elemento corresponderão, portanto, os números de seis deslocabilidades possíveis da estrutura global, e caso uma dessas deslocabilidades seja restrita, corresponder-lhe-á o número lógico 0 (zero).

Assim, a cada deslocabilidade de um elemento estarão fixadas as deslocabilidades da estrutura, através de seus números de ordem.

A matriz assim formada será denominada matriz indexal, pois é com base nos seus elementos que serão gerados os índices da matriz global de rigidez.

07 - Matriz global de rigidez K

A matriz global de rigidez é o quadro que relaciona os deslocamentos impostos à estrutura, às forças que nela surgem em consequência.

Com o procedimento delineado nas seções precedentes, obtivemos numeração apenas para os deslocamentos efetivos da estrutura. E ainda sabendo que todas as estruturas do tipo que estamos estudando são várias vezes hiperestáticas, ou seja, todas as forças são independentes, podemos concluir que a matriz global de rigidez é não singular, seu posto sendo igual ao número total de deslocabilidades.

Por outro lado, se tiverem sido tomados os cuidados indicados para a numeração dos nós, teremos que a diferença

máxima de numeração das deslocabilidades do mesmo elemento não excederá $3n + 3$, onde n é a diferença entre a numeração dos dois nós do mesmo elemento.

Se assim fôr feito para tãda a estrutura, a diferença máxima entre numeração de deslocabilidades de qualquer elemento não excederá $3n + 3$.

Como no método dos deslocamentos não se consideram outros efeitos de interação que não os pertencentes a um mesmo elemento, concluimos que ao longo de tãda a matriz as diferenças não excederão $3n + 3$, e nesse caso a matriz terá a forma de cinta simétrica, ou seja, apenas uma faixa de largura $6n + 5$ da matriz - paralela à diagonal principal - é ocupada, sendo nulos os elementos restantes.

A representação gráfica na Fig. 5.3 esclarece essa idéia.

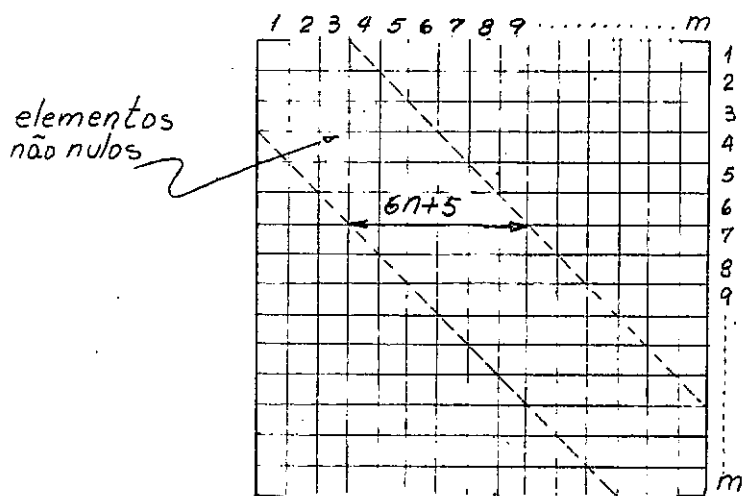


Fig. 5.3

08 - Autovalores da matriz de rigidez K .

a) Nosso objetivo é achar o primeiro autovalor de (4.31) ou seja, achar o menor valor de λ que consiga zerar o determinante (4.32), ou ainda zerar o determinante da matriz global de rigidez K obtida a partir de elementos das matrizes $k^{(i)}$ mostradas em (4.12).

O processo numérico aqui sugerido se baseia no tipo da matriz (cinta) e na sua dimensão.

Geralmente se analisam estruturas com 1.000 (mil) elementos ou mais, para as quais se podem considerar até 2500 graus de liberdade e , portanto, se obtêm matrizes de rigidez de dimensões respeitáveis - 2500 x 2500 - as quais dificilmente são armazenáveis em dispositivos de memória auxiliar, não se falando da memória interna dos computadores.

O processo numérico pode ser sintetizado da seguinte maneira:

I - O determinante será calculado pela multiplicação dos termos da diagonal principal da matriz triangularizada.

II - A matriz será gerada por linhas consecutivas à medida que fôr sendo triangularizada.

III - Os elementos da diagonal principal são armazenados, e a linha correspondente da matriz de rigidez vai sendo abandonada.

b) Mostremos o método de modo pormenorizado:

Seja a matriz quadrada

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (5.1)$$

Pode-se triangularizar A , ao se anular os elementos a_{ij} ($i > j$) utilizando-se o processo de substituir linhas pela combinação linear de outras linhas. O determinante da matriz não ficará alterado por êsse processo, descrito a seguir.

Admitamos que se substitua a segunda linha pela diferença dela própria, com o produto de a_{21} pela primeira linha dividida pelo pivô da transformação que, nesse caso, é o elemento a_{11} .

Representando pelos componentes, teríamos:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{21} &= a_{21} - \frac{a_{21} a_{11}}{a_{11}} \\ \bar{a}_{22} &= a_{22} - \frac{a_{21} a_{12}}{a_{11}} \\ \text{etc} \\ \bar{a}_{2n} &= a_{2n} - \frac{a_{21} a_{1n}}{a_{11}} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Do grupo de transformações (5.2) pode-se perceber que o elemento \bar{a}_{21} se anula, ao passo que os demais apenas mudam de valor, anulando-se eventualmente.

Se em seguida o processo fôr repetido para a terceira linha, ou seja, se fôr substituída a terceira linha pela diferença entre ela mesma e o produto \bar{a}_{31} pela primeira, dividido pelo pivô da transformação, teremos:

$$\bar{a}_{31} = a_{31} - \frac{a_{31} a_{11}}{a_{11}}$$

$$\bar{a}_{32} = a_{32} - \frac{a_{31} a_{12}}{a_{11}}$$

etc

$$\bar{a}_{3n} = a_{3n} - \frac{a_{31} a_{1n}}{a_{11}}$$

Novamente apenas o elemento \bar{a}_{31} se anula e os demais da linha são transformados. Ao se prolongar êsse procedimento até a n-ésima linha, tem-se anulado a primeira coluna com exceção do elemento a_{11} que serviu de pivô.

Para completar a triangularização, procede-se igualmente com a segunda coluna, isto é, usa-se \bar{a}_{22} como pivô e zeram-se os elementos da segunda coluna pelo mesmo processo, e assim por diante, até zerados todos os elementos a_{ij} ($i > j$).

Quando se trata de uma matriz cinta que contém elementos nulos (também na cinta) o processo permite determinadas simplificações como sejam:

- I - um elemento que já é nulo não precisa ter sua linha modificada, portanto, os elementos nulos que se encontrem numa coluna externamente à cinta poderão ser tomados como inexistentes.
- II - um elemento nulo na linha do pivô evita o processo de substituição para todos os elementos pertencentes à sua coluna.

Isso é facilmente observável, se em (5.2) tomarmos como nulo o elemento a_{21} . Veremos que $\bar{a}_{22} = a_{22}$, $\bar{a}_{32} = a_{32}$, etc. e que, portanto, não haverá alteração pela substituição.

Com isso estamos possibilitados de desprezar também a porção das linhas externamente à cinta.

c) Devido a essas peculiaridades do método, poderemos calcular o determinante de uma matriz cinta, por maior que sejam suas dimensões (desde que a cinta se mantenha com dimensão razoável).

Imaginemos uma matriz com cinta de largura $3n + 3$, onde n é a maior diferença de numeração entre nós dos elementos ao longo de toda a estrutura.

Se estivermos em condições de gerar qualquer elemento da matriz, geremos o primeiro quadrado $3n+3 \times 3n+3$, e apliquemos o método de triangularização a esse quadrado (hachurado na Fig. 5.4).

Zerados os elementos da primeira coluna, calcula-se

mais uma linha e coluna para a cinta (porção do gráfico, Fig. 5.4, compreendida internamente ao quadrado 2 e externamente ao quadrado 1); guarda-se o pivô P_1 , e abandonam-se os elementos da primeira linha e coluna, os quais já são inúteis. Assim obteremos um novo quadrado com $3n+3 \times 3n+3$ elementos (pontilhado 2 na Fig. 5.4) cujo pivô será P_2 .

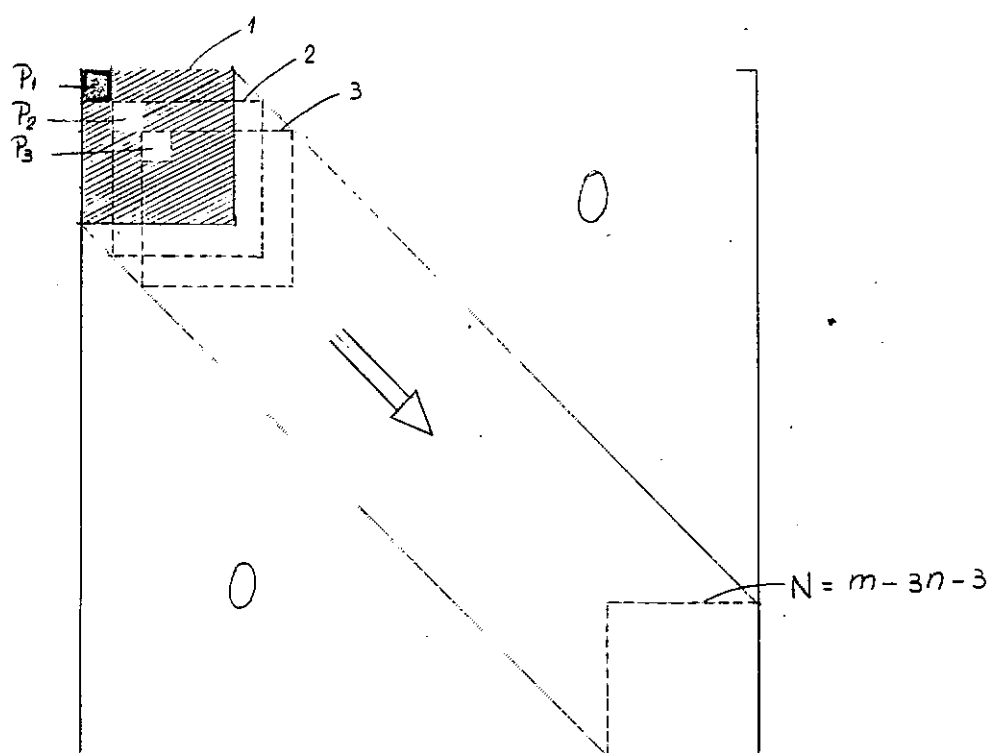


Fig. 5.4

Aplica-se o processo de triangularização à primeira coluna do quadrado 2 zerando-se seus elementos, e guarda-se o pivô P_2 , multiplicando-o por P_1 .

Procedendo deste modo até o quadrado $N = m - 3n + 3$

(onde m é o número de graus de liberdade da estrutura) e triangularizando-se esse último, tem-se, ao fim do processo, os produtos dos pivôs, que são os produtos dos termos da diagonal principal da matriz triangularizada e representam o valor do determinante.

Podemos observar que durante todo o processo, se trabalhou com uma matriz de $(3n+3)(3n+3)$, a qual pode perfeitamente ser armazenada na memória interna de um computador.

O processo apresentado permite pois calcular o determinante de uma matriz cinta.

d) O primeiro autovalor de (4.37) poderá, pois, ser achado por tentativas: selecionam-se alguns valores de T para os quais se calcula o determinante. Quando este mudar de sinal significa que se passou pelo autovalor.

A mudança de sinal do determinante, se deve à mudança de sinal de um dos termos de sua diagonal principal. Portanto, também é possível detectar a passagem pelo autovalor pesquisando o surgimento de um (e apenas um) pivô negativo.

Do apresentado supra, podemos ver a importância de se poder calcular um termo genérico da matriz de rigidez, independentemente dos demais.

09 - Geração de um elemento genérico da matriz de rigidez.

A cada par de deslocamentos pertencentes a um ou

mais elementos estruturais, corresponde um termo da matriz de rigidez.

Para se obter esse termo é preciso levar a efeito duas verificações; uma que indique a quantos elementos esse par pertence, outra que relacione o par às deslocabilidades de cada um desses elementos. A primeira é obtida da tabela de relacionamento, a segunda da matriz indexal.

De fato, admitamos que se procure o elemento K_{ij} , que corresponde às deslocabilidades i e j . O procedimento será:

- I - Procura-se na tabela de relacionamento quais os elementos que concorrem nos graus de liberdade i e j .
- II - Conhecidos os elementos, vai-se à matriz indexal, e procura-se nas linhas que lhes são correspondentes os índices i e j .
- III - Encontrados ambos os índices para o mesmo elemento procura-se a quais colunas da matriz indexal eles irão pertencer e determinam-se no topo dessas colunas os índices da matriz de rigidez do elemento.
- IV - Em posse desses índices, pode-se determinar o elemento da matriz de rigidez (4.12) do elemento estrutural no sistema global de coordenadas

que vai compôr a matriz global.

V - Assim se faz para todos os elementos estruturais indicados na tabela de relacionamento.

VI - A soma de todos os elementos assim escolhidos das matrizes dos elementos estruturais, comporá o elemento K_{ij} da matriz global K .

10 - Forma modificada da matriz de resposta do elemento no sistema local de coordenadas.

Em V-09 foi exposto um modo de compôr a matriz global a partir de elementos das matrizes locais.

No entanto, para facilitar o processamento automático e estabilizar o processo numérico, é conveniente modificar a apresentação das matrizes locais.

a) De modo geral, se procuram as tensões que uma grelha é capaz de suportar e não as forças compressivas em determinados elementos. Daí é interessante, ao invés de usar um fator proporcional a força (λ), usar-se um fator proporcional a tensão.

Os elementos genéricos das matrizes locais eram do tipo

$$k = k_R - T k_G^* \quad (4.13)$$

onde k_G^* é a matriz geométrica quando $T = 1$.

Ao se aplicar à estrutura, uma tensão compressiva uniforme, cada elemento estrutural perpendicular ao seu plano de ação, observará uma força proporcional à própria área seccional.

$$T = \sigma A_c \quad (5.4)$$

então, podemos por (4.12) na forma

$$k = k_R - \sigma A_c k_G^* \quad (5.5)$$

Dêsse modo, se quisermos variar as cargas externas sobre a estrutura, bastará variar σ , e cada elemento absorverá a parcela que lhe for proporcional.

b) Por outro lado, é conveniente operar-se com termos da matriz de resposta, em forma equidimensional, com o intuito de melhorar a estabilidade operacional do processo, pois os valores numéricos dos vários elementos passam a ser da mesma ordem.

O meio de equidimensionalizar os termos da matriz de resposta, é redefinirem-se os deslocamentos angulares para deslocamentos lineares e os momentos nodais para forças nodais.

Sabemos que a matriz de resposta interliga forças nodais generalizadas e deslocamentos nodais

$$F = k u \quad (5.6)$$

Seja l_0 um comprimento constante, convenientemen-

te escolhido (por exemplo um valor médio de comprimentos de elementos estruturais).

Se multiplicarmos o deslocamento angular genérico ϕ por ℓ_0 obteremos um deslocamento modificado linear $\phi' = \phi \ell_0$.

Igualmente se dividirmos um momento genérico M por ℓ_0 estaremos obtendo uma força $M' = M/\ell_0$.

Ao procedermos a essa redefinição, a matriz de resposta ficará alterada. De fato, como mostrado em IV-03, cada elemento dispõe de seis deslocamentos nodais u_1, \dots, u_6 e de seis correspondentes forças nodais F_1, \dots, F_6 , relacionados pela matriz de resposta através da relação (5.6). Ao redefinirmos os deslocamentos u_1, u_2, u_4, u_5 e os momentos F_1, F_2, F_4, F_5 obteremos

$$\begin{aligned} u'_1 &= u_1 \ell_0 & F'_1 &= F_1/\ell_0 \\ u'_2 &= u_2 \ell_0 & F'_2 &= F_2/\ell_0 \\ u'_3 &= u_3 & F'_3 &= F_3 \\ &\text{etc.} & &\text{etc.} \end{aligned}$$

Seja uma linha genérica do produto matricial (5.6)

$$F_2 = k_{21} u_1 + k_{22} u_2 + k_{23} u_3 + \dots + k_{26} u_6$$

Se quisermos usar os deslocamentos redefinidos, teremos:

$$F'_2 = \frac{1}{\ell_0} \left(k_{21} \frac{u'_1}{\ell_0} + k_{22} \frac{u'_2}{\ell_0} + k_{23} u'_3 + \dots + k_{26} u_6 \right)$$

daí se conclui que:

$$k'_{21} = \frac{k_{21}}{\ell_0} ; \quad k'_{22} = \frac{k_{22}}{\ell_0} ; \quad k'_{23} = \frac{k_{23}}{\ell_0} , \quad \text{etc.}$$

Procedendo de modo análogo para as demais linhas obteremos uma nova matriz $k = k_R + k_G$, cujos termos têm todos a dimensão $\frac{F}{L}$.

$F \rightarrow$ símbolo dimensional de força;

$L \rightarrow$ símbolo dimensional de comprimento;

portanto a dimensão de uma constante de mola.

É preciso observar nêsse ponto que ao se incluir um engastamento elástico para um determinado nó a constante de mola do deslocamento angular, deverá ser dividida por ℓ_0 para figurar como constante de deslocamento linear.

As matrizes k_R e k_G modificadas pela redefinição dos deslocamentos e forças nodais estão representadas nas tabelas 5.2 e 5.3.

c) O passo seguinte consiste em se retirar de todos os elementos das matrizes k_R e k_G uma parcela

$$\frac{E I_0}{\ell_0^3}$$

onde: E é o módulo de elasticidade;

ℓ_0 é um valor constante para toda a estrutura e corresponde a um comprimento de elemento, convenient-

temente escolhido;

I_0 idem supra para momento de inércia.

A escolha de I_0 e l_0 é orientada com intuito de se obter para as matrizes k_R termos de valor mais próximo possível da unidade, impedindo, dessa maneira, que os determinantes das matrizes globais excedam a capacidade numérica do computador.

Como consequência desse procedimento poderemos isolar nos termos da matriz geométrica k_G , parcelas do tipo

$$\mu = \frac{\sigma l_0^2}{E I_0}$$

A nova forma assumida pela matriz (4.12) devidamente modificada em b), é:

$$k = \frac{E I_0}{l_0^3} | k'_R - k'_G | \quad (5.7)$$

k'_R e k'_G estão representadas nas tabelas 5.4 e 5.5.

Em (5.7) podemos observar que todos os termos da matriz k'_G são proporcionais ao fator μ e portanto a tensão σ .

A variação σ na procura da carga de instabilidade é expressa pela variação de μ , o qual terá o mesmo valor para todos os membros estruturais em cada passo.

S I M É T R I C A

$k_R =$

$\frac{GJ_t}{\ell \ell_0^2}$					
0	$\frac{(4+\Phi)EI}{(1+\Phi)\ell\ell_0^2}$				
0	$\frac{6EI}{(1+\Phi)\ell^2\ell_0}$	$\frac{12EI}{(1+\Phi)\ell^3}$			
$-\frac{GJ_t}{\ell\ell_0^2}$	0	0	$\frac{GJ_t}{\ell\ell_0^2}$		
0	$\frac{(2-\Phi)EI}{(1+\Phi)\ell\ell_0^2}$	$\frac{6EI}{(1+\Phi)\ell^2\ell_0}$	0	$\frac{(4+\Phi)EI}{(1+\Phi)\ell\ell_0^2}$	
0	$-\frac{6EI}{(1+\Phi)\ell^2\ell_0}$	$-\frac{12EI}{(1+\Phi)\ell^3}$	0	$-\frac{6EI}{(1+\Phi)\ell^2\ell_0}$	$\frac{12EI}{(1+\Phi)\ell^3}$

TABELA 5.2

$$k_G = \frac{\sigma A_c}{(1+\Phi)^2}$$

0					
0	$\frac{\ell}{\ell_0^2} \left(\frac{2}{15} + \frac{\Phi}{6} + \frac{\Phi^2}{12} \right)$				
0	$\frac{1}{10 \ell_0}$	$\frac{1}{\ell} \left(\frac{6}{5} + 2\Phi + \Phi^2 \right)$	S I M É T R I C A		
0	0	0	0		
0	$-\frac{\ell}{\ell_0^2} \left(\frac{1}{30} + \frac{\Phi}{6} + \frac{\Phi^2}{12} \right)$	$\frac{1}{10 \ell_0}$	0	$\frac{\ell}{\ell_0^2} \left(\frac{2}{15} + \frac{\Phi}{6} + \frac{\Phi^2}{12} \right)$	
0	$-\frac{1}{10 \ell_0}$	$-\frac{1}{\ell} \left(\frac{6}{5} + 2\Phi + \Phi^2 \right)$	0	$-\frac{1}{10 \ell_0}$	$\frac{1}{\ell} \left(\frac{6}{5} + 2\Phi + \Phi^2 \right)$

TABELA 5.3

$k'_R =$

$\frac{G J_t l_o}{EI_o l}$					
0	$\frac{(4+\Phi) I l_o}{(1+\Phi) I_o l}$				
0	$\frac{6 I l_o^2}{(1+\Phi) I_o l^2}$	$\frac{12 I l_o^3}{(1+\Phi) I_o l^3}$			
$\frac{G J_t l_o}{EI_o l}$	0	0	$\frac{G J_t l_o}{EI_o l}$		
0	$\frac{(2-\Phi) I l_o}{(1+\Phi) I_o l}$	$\frac{6 I l_o^2}{(1+\Phi) I_o l^2}$	0	$\frac{(4+\Phi) I l_o}{(1+\Phi) I_o l}$	
0	$-\frac{6 I l_o^2}{(1+\Phi) (1+\Phi)}$	$-\frac{12 I l_o^3}{(1+\Phi) I_o l^3}$	0	$-\frac{6 I l_o^2}{(1+\Phi) I_o l^2}$	$\frac{12 I l_o^3}{(1+\Phi) I_o l^3}$

S I M É T R I C A

TABELA 5.4

k'_G

S I M É T R I C A

TABELA 5.5

Dessa maneira não precisamos nos ocupar com a distribuição dos esforços pelos vários elementos estruturais, bastando variar a tensão de compressão global uniforme σ .

Podemos ainda observar que o zero do determinante (4.38) não irá se alterar, visto que está apenas multiplicado por um fator constante.

11 - Forma modificada da matriz de resposta do elemento no sistema global de coordenadas.

a) As transformações em IV-04.d mostram como obter a característica de resposta do elemento no sistema global, por meio das matrizes de rotação $|R|$, compostas pelos cossenos diretores dos elementos estruturais com os eixos do sistema global de coordenadas. Cada matriz de rigidez de elementos precisaria ser pré e pós multiplicada pela matriz de rotação $|R|$ quando então se obteriam os termos geradores da matriz global de resposta.

b) Na secção precedente mostramos uma forma modificada da matriz de resposta do elemento no sistema local, a qual não alterava no entanto os zeros do determinante (4.38).

Pretendemos, nesta secção, simplificar até certo ponto o procedimento decorrente do duplo produto matricial .. (4.17) que deveria ser efetuado para cada matriz de resposta k (5.7).

Seja k_{ij} ($i, j = 1, \dots, 6$) a matriz de resposta do elemento no sistema local.

Observando (5.7) podemos notar que a matriz k é basicamente composta por 5 termos, que se repetem por toda a matriz, e são:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \frac{G J_t \ell_0}{E I_0 \ell} \\
 k_2 &= \frac{(4+\Phi) I \ell_0}{(1+\Phi) I_0 \ell} - \frac{\mu A_C \ell}{(1+\Phi)^2 \ell_0} \left(\frac{2}{15} + \frac{\Phi}{6} + \frac{\Phi^2}{12} \right) \\
 k_3 &= \frac{6 I \ell_0^2}{(1+\Phi) I_0 \ell^2} - \frac{\mu A_C}{(1+\Phi)^2} \left(\frac{1}{10} \right) \\
 k_4 &= \frac{12 I \ell_0^3}{(1+\Phi) I_0 \ell^3} - \frac{\mu A_C \ell_0}{(1+\Phi)^2 \ell} \left(\frac{6}{5} + 2\Phi + \Phi^2 \right) \\
 k_5 &= \frac{(2-\Phi) I \ell_0}{(1+\Phi) I_0 \ell} + \frac{\mu A_C \ell}{(1+\Phi)^2 \ell_0} \left(\frac{1}{30} + \frac{\Phi}{6} + \frac{\Phi^2}{12} \right)
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Utilizando essa simplificação, a matriz de resposta

k se reduz a:

$$k = \begin{vmatrix}
 k_1 & & & & & \\
 0 & k_2 & & & & \\
 0 & k_3 & k_4 & & & \\
 -k_1 & 0 & 0 & k_1 & & \\
 0 & k_5 & k_3 & 0 & k_2 & \\
 0 & -k_3 & -k_4 & 0 & -k_3 & k_4
 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \text{Simétrica} \\ \\ \\ \end{matrix} \tag{5.9}$$

A matriz de rotação para o caso tri-dimensional em estudo é dada (em 4.19) por

$$R = \begin{vmatrix} C_X & -C_Y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_Y & C_X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_X & -C_Y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_Y & C_X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (5.10)$$

Poderíamos proceder ao produto matricial (4.17) no próprio programa, porém, como a matriz $|R|$ é em grande parte composta por elementos nulos, pode-se afigurar mais econômica a execução de (4.17) de forma genérica e introduzir no programa já a matriz $|\bar{k}|$ no sistema global. De fato, procedendo ao duplo produto matricial indicado por

$$\bar{k} = |R|^T |k| |R| \quad (4.19)$$

e usando k na forma (5.9) obtém-se $|\bar{k}|$ mostrada na tabela 5.6, através do qual se pode montar a matriz global de rigidez como demonstrado em V - 09.

$$|\bar{k}| =$$

$k_1 C_X^2 + k_2$					
$(k_1 - k_2) C_X C_Y$	$k_1 C_Y^2 + k_2 C_X^2$				
$k_3 C_Y$	$-k_3 C_X$	k_4			
$-k_1 C_X^2 + k_5 C_Y^2$	$-(k_1 + k_5) C_X C_Y$	$k_3 C_Y^2$	$k_1 C_X^2 + k_2 C_Y^2$		
$-(k_1 + k_5) C_X C_Y$	$-k_1 C_Y^2 + k_5 C_X^2$	$-k_3 C_X$	$(k_1 - k_2) C_X C_Y$	$k_1 C_Y^2 + k_2 C_X^2$	
$-k_3 C_Y$	$k_3 C_X$	$-k_4$	$-k_3 C_Y$	$k_3 C_X$	k_4

S I M É T R I C A

TABELA 5.6

12 - Diagrama de blocos simplificado.

Do apresentado nas secções precedentes podemos montar um diagrama de blocos.

Cada bloco representa uma série auto-suficiente de operações que foram apresentadas neste capítulo e serão porme_
norizadas no próximo.

O fluxo do diagrama é o indicado pelas flechas e re_
presenta a seqüência em que os blocos deverão ser apostos.

LEITURA DAS CARACTERÍSTICAS
DE IDENTIFICAÇÃO DA ESTRUTURA
E
GERAÇÃO DE COMPRIMENTOS E
COSSENOS DIRETORES

LEITURA DAS CONDIÇÕES DE
CONTÔRNO E GRAUS DE LIBERDADE

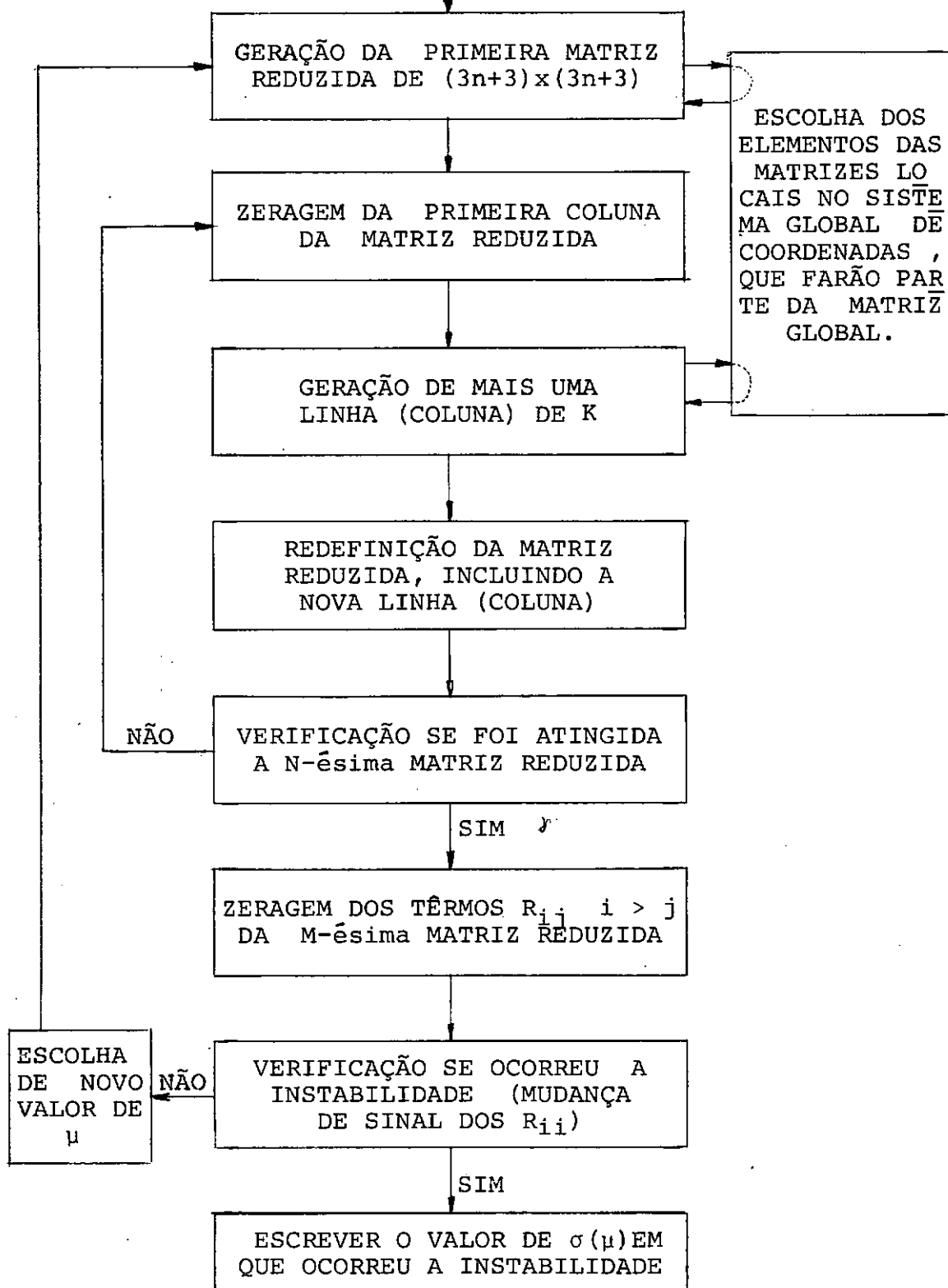
NUMERAÇÃO DOS GRAUS
DE LIBERDADE

GERAÇÃO DA MATRIZ
DE RELACIONAMENTO

GERAÇÃO DA
MATRIZ INDEXAL

ESCOLHA DO 1º VALOR DE μ

A



CAPÍTULO VI

PROGRAMA FORTRAN PARA SOLUÇÃO DO PROBLEMA GERAL DE INSTABILIDADE POR MEIO DE COMPUTADORES

01 - No diagrama de blocos constante de (V-12) ficou explicitada a sistemática de operação e os ciclos iterativos necessários à obtenção da carga de flambagem para determinada grelha.

No presente Capítulo pretende-se expôr uma das maneiras pelas quais essa sistemática pode ser traduzida para a linguagem (FORTRAN) de um computador científico.

No Apêndice III está apresentada uma cópia da listagem do programa fornecida por um computador IBM 360/40.

As secções em que este capítulo está dividido correspondem às secções superescritadas por comentários, no programa.

As notações utilizadas são as do programa, e serão explicitadas no transcorrer da análise.

02 - Leitura das características da estrutura.

ã) Inicialmente são lidos os dados gerais:

NM = número de membros (elementos estruturais);

NJ = número de juntas (nós);

E = módulo de elasticidade (ton/cm^2);
 G = módulo de elasticidade transversal (ton/cm^2);
 I_o = momento de inércia constante, convenientemente es
 colhido (geralmente o maior valor);
 L_o = comprimento constante, convenientemente escolhido
 (geralmente o menor valor).

A razão de I_o , L_o está explicada em V-10.

b) A seguir são lidos os dados dos elementos estruturais:

De cada nó se fornece numeração e coordenadas:

$JJ(I)$ = numeração do nó j ;

$XJ(I)$, $YJ(I)$ = coordenadas do nó j ;

idem para o nó k .

Do elemento se fornece:

$IN(I)$ = momento de inércia (flexão);

$JT(I)$ = momento de inércia à torção.

$AS(I)$ = área da seção que resiste ao cisalhamento;

$AC(I)$ = área da seção que resiste à compressão.

Internamente calculam-se comprimentos - $L(I)$ - e cossenos diretores - $CX(I)$, $CY(I)$ - Ver V-01.

03 - Leitura das condições de contorno e graus de liberdade.

ã) Para cada nó são fornecidos:

KF = numeração do nó;

LR1, LR2, LR3 = deslocabilidades (números lógicos) na direção dos eixos X, Y, Z

RIG1, RIG2, RIG3 = rigidez de eventuais apoios e lásticos segundo as direções de X, Y, Z

(Ver V - 03)

Após a leitura, os LR1, ..., RIG3 são sujeitos a um processo de numeração em sequência, com o qual se pretende obter uma correspondência entre eles e cada deslocabilidade possível da estrutura.

Os RIG1, RIG2, RIG3 são multiplicados pelo fator ... L_O^3/EI_O com o intuito de serem passíveis de adição direta aos termos da matriz de resposta R, os quais foram sujeitos à mesma operação.

04 - Numeração das deslocabilidades efetivas da estrutura.

a) Em VI - 03 foi feita uma numeração em sequência das deslocabilidades possíveis; pretende-se agora numerar em sequência, apenas as deslocabilidades efetivas, como definidos em V - 04. Para tal, usa-se LCR(KC) como a variável lógica cujo valor a cada deslocamento efetivo será a soma dos deslocamentos efetivos (números lógicos $LR(KC) = 1$) anteriores.

b) Igualmente, só vão nos interessar as constantes

elásticas de deslocamentos efetivos, visto que os demais estão bloqueados; daí se proceder à mesma renumeração, para os RIG(N).

c) O número total de deslocabilidades efetivas da estrutura, é dado pelo último valor assumido pela variável lógica LCR(NJ3), onde NJ3 é o número de deslocabilidades possíveis.

Como este valor é indicativo do posto da matriz de resposta, convém guardá-lo de forma explícita com o nome ... CHECK pois ele servirá de teste para concluir-se a matriz de rigidez está completa.

05 - Determinação da largura da cinta.

a) Procura-se inicialmente qual a diferença máxima de numeração entre nós de um elemento ao longo da estrutura (representada pela variável MAX).

b) A largura da cinta ocupada da matriz de resposta R é dada por $LAR = 3 * MAX + 3$. (Ver V - 07).

06 - Geração da tabela de relacionamento.

Nesta secção pretende-se determinar quais elementos da estrutura concorrem em quais nós.

Para tal, usa-se a variável $NML(JA, AA)$ = número do

membro que concorre em determinado nó, a qual é função do número do nó JA e do número possível de elementos que nele podem concorrer. Com as grelhas que estamos analisando o valor de AA (número de membros que concorrem em um nó) não ultrapassa 4 (quatro).

O processo de geração é bastante simples: consiste em se percorrer os elementos da estrutura e guardar em uma mesma variável $NML(JA, AA)$, às vezes $AA = A(JA)$, que se de para com um mesmo nó $JAA = JJ(I)$ ou $KA = JK(I)$.

Ao se querer saber posteriormente quais elementos concorrem em um nó (por exemplo JA), procuram-se os NML que possuam esse JA (ver VI - 9.b).

07 - Geração da matriz indexal.

a) Os termos desta matriz são gerados do seguinte modo:

I - quando uma deslocabilidade (por exemplo $K = 3 JJ(I) - 2$) de um elemento (I) fôr efetiva ($LR(K) \neq 0$), o termo da matriz indexal terá o valor da variável lógica $(LCR(K))$ correspondente a essa deslocabilidade;

II - caso contrário, o termo é nulo.

Dêste modo, têm-se os termos da matriz indexal ... $IND(I, J)$ em função do elemento ($I = 1, \dots, NM$) e da desloca

bilidade possível ($J = 1, \dots, 6$) dêse elemento.

Portanto, ao se procurar a que deslocabilidade da estrutura pertence a deslocabilidade J do elemento I , basta procurar o valor de $IND(I, J)$.

b) Dentro do mesmo percurso dos elementos da estrutura, processa-se o relacionamento entre cada grau de liberdade de LCC (deslocabilidade efetiva) e elementos da estrutura que nêle concorrem.

Esse relacionamento é bastante simples pois já se têm os elementos que concorrem em cada nó, bastando repeti-los para cada grau de liberdade que pertence a êsse nó.

O procedimento adotado até a presente secção se refere à estrutura de modo geral, e independe do especial carregamento.

A seguir, será apresentado o processo de geração da matriz de rigidez, o qual será repetido tantas vêzes quantas um novo carregamento fôr considerado.

08 - Leitura do intervalo de variação da tensão, e precisão desejada.

Ao pesquisarmos a tensão de instabilidade da grelha, convém delimitar um intervalo de variação SIG MIN - SIG MAX o número de passos que se deseja nêsse intervalo (IDEL) e a precisão com quêese deseja o resultado final(ACC).

Com êsses dados o programa determinará quais os valores de μ (MI) a adotar (ver também V-100c).

09 - Determinação do primeiro quadrado da cinta.

No programa o quadrado operacional da matriz de resposta é denominado $R(M,N)$, onde M é o índice das linhas e N o índice das colunas.

De início procede-se à zeragem de todos os elementos de $R(M,N)$.

Para se obter um elemento genérico da matriz de rigidez, de índices M e N , o procedimento é o seguinte:

a) procuram-se os elementos $NMI(M1,KC)$ que concorrem no grau de liberdade M (denominado $M1$ no programa para simplificar o procedimento posterior);

b) comparam-se os elementos $NMI(M1,KC)$ que concorrem em M com os elementos $NMI(N1,NC)$ que concorrem em N ;

c) apenas quando os dois graus de liberdade pertencerem ao mesmo elemento, haverá possibilidade de se gerar um termo da matriz de resposta;

d) achado um elemento dêsse tipo (MD), procura-se a quais deslocabilidades do elemento os graus de liberdade $M1$ e $N1$ irão corresponder. Isso é obtido por comparação entre o valor do grau de liberdade $M1$, ou $N1$, e o valor do termo $IND(MD, J)$ ou $IND(MD, JJJ)$.

Achados J e JJJ que são os índices de linha e coluna da matriz de resposta do elemento no sistema global de coordenadas, pode-se determinar, por meio do subprograma a ser discutido em VI-14, qual a contribuição (RGI) do elemento MD para o termo $R(M,N)$ da matriz de resposta.

e) repete-se o processo descrito em c) e d) até estarem esgotados todos os elementos que podem contribuir para o termo $R(M,N)$ da matriz de resposta;

f) feito isso, obtém-se o termo $R(M,N)$ por soma de todas as parcelas RGI dos vários elementos;

g) é preciso lembrar que termos da diagonal principal poderão ter acréscimo de uma constante de mola $RIG(K)$ quando corresponderem a um apoio elástico;

h) variando-se M e N de 1 até LAR, obteremos o primeiro quadrado da matriz cinta de resposta.

A seguir terá início o processo iterativo de cálculo do determinante:

10 - Zeragem da primeira coluna da matriz operacional.

a) Usa-se o processo pormenorizado em V-8.b, desprezando-se o recálculo de termos nulos da coluna em operação bem como a zeragem de colunas cujo termo na linha do pivô é nulo.

b) O valor dos elementos da diagonal principal da

matriz triangularizada ($R(1,1)$) são listados juntamente com o valor do determinante, à medida que se processa o cálculo.

c) A variável ISIGN serve para computar o número de vezes que o determinante muda de sinal, para servir de critério posteriormente.

11 - Cálculo de mais uma linha e coluna da matriz operacional

a) Guardado o primeiro pivô, procede-se a uma renuneração dos elementos da matriz operacional, provocando-se uma translação de uma fila em cada linha e coluna da matriz:

$$R(M,N) = R(M+1, N+1).$$

b) Procede-se à zeragem da linha e coluna LAR, liberando então o espaço para mais uma linha e coluna da matriz operacional, que são geradas do modo descrito em VI-09.

Faz-se uso do índice IAC, o qual têm como finalidade indicar qual a posição real da cinta em que se está, pois embora a matriz operacional só tem dimensão LAR x LAR, os graus de liberdade atingem valores até CHECK.

12 - Teste para determinar o fim da cinta.

Quando a matriz operacional atinge o fim da cinta, não é mais preciso gerar novas linhas, bastando proceder à zeragem das existentes até calculado o último pivô $R(\text{CHECK}, \text{CHECK})$.

A verificação é feita pela variável $K = M + IAC$. Caso já tenha sido atingido o fim da cinta, uma variável lógica INF é feita unitária e controla a não geração de novas linhas.

13 - Análise de resultados e escolha de novo valor de μ .

Finda a determinação de uma matriz de rigidez, procura-se saber se a instabilidade ocorreu. Se a variável $ISIGN$ fôr nula, significa que não ocorreu, e aumenta-se o valor da tensão. Se fôr não nula, cria-se um novo intervalo de variação, que será o correspondente a uma das divisões do intervalo anterior. Esse novo intervalo é, por sua vez, dividido em número $IDEL$ de partes e o cálculo é reiniciado.

Quando a última divisão atingir a precisão desejada, o resultado final será realçado.

14 - Subprograma para determinação dos termos da matriz de resposta do elemento que contribuem para a matriz global de resposta.

Em VI-09.d foram determinados os índices de linha e coluna J e JJJ do termo da matriz de resposta do elemento no sistema global que deverá compôr a matriz global de resposta.

Por outro lado, sabemos de V-11.b, que a matriz

do elemento no sistema local é uma repetição de cinco termos básicos (5.8), os quais, depois de multiplicados convenientemente pelas matrizes de rotação, compõem a matriz no sistema global (Tabela 5.6).

No programa, portanto, calculam-se esses termos básicos RG1, RG2, RG3, RG4, RG5, após o que, procuram-se, com J e JJJ, a qual das combinações RGI (que representam os elementos da matriz no sistema global) eles irão pertencer. Feito isso, calcula-se o correspondente RGI e volta-se ao ponto em que o programa foi interrompido.

15 - Comentários.

A listagem apresentada no apêndice III, é apenas uma das muitas maneiras de se resolver o problema.

As soluções apresentadas basearam-se na utilização de um computador IBM 1130 com 32K de memória interna, tendo o programa posteriormente sido adaptado para utilização do sistema IBM 360/40.

Preferiu-se não utilizar dispositivos de memória auxiliar, pois seu acesso é muito vagaroso no sistema 1130, e tratando com problemas da ordem do nosso, os tempos de processamento seriam proibitivos.

Devido à maior velocidade e capacidade do sistema 360 os tempos ficaram bastante reduzidos.

* * *

CAPÍTULO VII

APLICAÇÕES E RESULTADOS

01 - Pretendemos, de início, fazendo uso do programa desenvolvido em V e VI, pesquisar qual a influência de efeitos torcionais e de cisalhamento, bem como engastamento de longitudinais, sobre a tensão de instabilidade das grelhas, quando comparada com resultados teóricos aproximados.

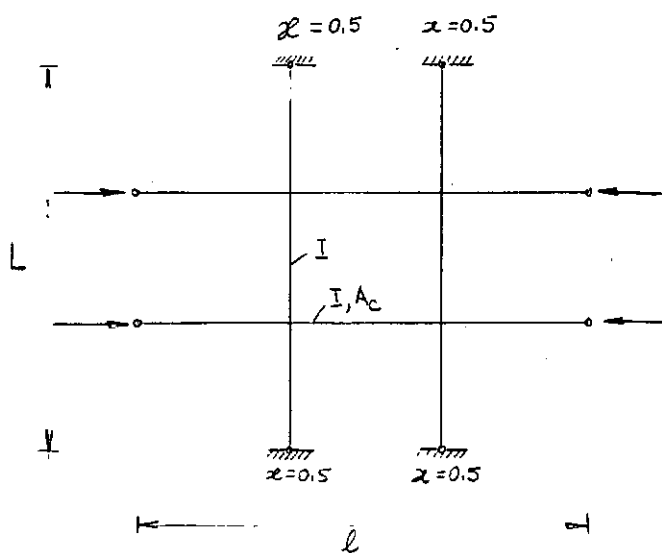
Um passo seguinte seria a resolução de um convés real, com tôdas as irregularidades e assimetrias que lhe são inerentes.

02 - Estudo de uma grelha simplificada.

A título de exemplo, mostraremos o modo de utilizar o programa, para o caso de uma grelha simples mostrada na Fig. 7.1, excluindo efeitos torcionais e de cisalhamento.

a) É necessário, de início, dividir a estrutura em um número conveniente de elementos estruturais. Dividiremos cada vão livre de longitudinal em 2 elementos, e cada vão livre de transversal será o próprio elemento estrutural.

Assim procedendo, obtêm-se a divisão da Fig. 7.2 .



$$\begin{aligned} I &= 50.000 \text{ cm}^4 & L &= 1.500 \text{ cm} \\ A_c &= 150 \text{ cm}^4 & l &= 1.800 \text{ cm} \end{aligned}$$

Fig. 7.1

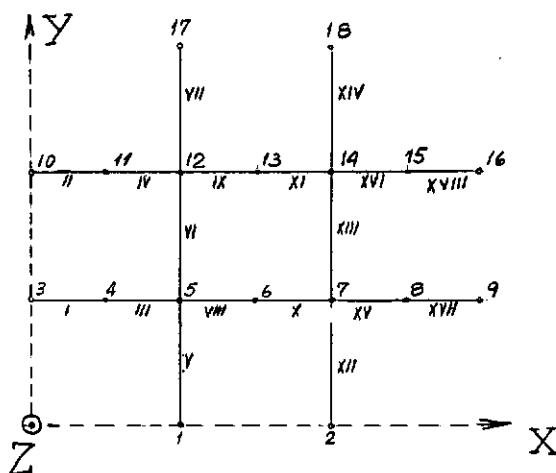


Fig. 7.2

onde: número de membros = 18
 número de juntas = 18
 $I_O = 50.000 \text{ cm}^4$
 $l_O = 300 \text{ cm}$

Com êsses dados, e as coordenadas dos nós, define-se a geometria da estrutura.

b) A cinemática é determinada pelas condições de contorno:

- I - extremidades das longitudinais (3, 9, 10, 16) são articuladas, portanto, restritas a deslocamento linear segundo Z e deslocamento angular segundo X (torção) e livres a deslocamento angular segundo Y (flexão);
- II - os nós intermediários das longitudinais (4, 11, 6, 13, 8, 15) deverão ser restritos à torção (X), pois nêles não concorrem elementos que possam provocar semelhante ação. Os deslocamentos segundo Y e Z deverão ser livres;
- III - Os nós correspondentes a cruzamentos de longitudinais e transversais são totalmente livres;
- IV - as extremidades das transversais, por serem semiengastadas, deverão ser tratadas como articuladas com acréscimo das constantes de mola dos engastamentos parciais na direção do deslocamento livre.

Portanto, os deslocamentos Y e Z são restritos,

o deslocamento X é livre, e a constante de mola (\bar{c}) do engastamento elástico com características $x = 0.5$ é:

$$x = \frac{1}{1 + \frac{2 EI}{\bar{c} L}} = 0.5$$

$$c = \frac{2 EI}{L}$$

Porém, lembrando que os deslocamentos angulares foram redefinidos para deslocamentos lineares, é preciso dividir o valor de \bar{c} por ℓ_0^2 ; então

$$c = \frac{2 EI}{L \ell_0^2} = 1,55 \text{ ton/cm}^2$$

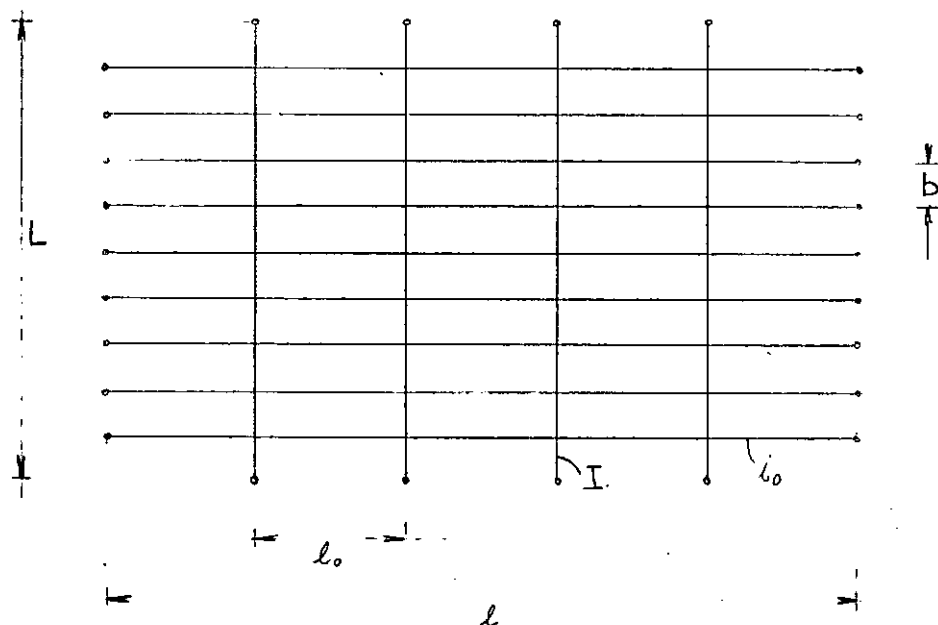
c) Com os dados acima, obtêm-se a tensão de flambagem no intervalo:

$$8.11 < \sigma < 8.22 \text{ ton/cm}^2$$

A listagem da saída do programa é mostrada no Apêndice IV.

03 - Estudo de uma grelha genérica

As pesquisas serão conduzidas para uma grelha representativa de convês, composta por 9 (nove) longitudinais comprimidas e 4 (quatro) transversais (Fig. 7.3).



$$\begin{array}{ll}
 l & = 1.000 \text{ cm} & l_0 & = 200 \text{ cm} \\
 L & = 600 \text{ cm} & b & = 60 \text{ cm}
 \end{array}$$

Fig. 7.3

Esse modelo foi baseado numa estrutura, tipo convês, com as seguintes características:

- I - chapeamento com espessura 1 cm;
- II - longitudinais compostas por cantoneiras de abas desiguais com dimensões 12 x 8 x 1.0 cm. Levando-se em conta o comprimento livre da longitudinal (200 cm) e podendo considerar-se cada vão como engastado, conclui-se (Rostovtsev⁽¹⁾), que a largura colaborante de chapeamento é 35 cm, obtendo-se a viga mostrada na figura, cujas características seccionais são:

$$i_o = 1.000 \text{ cm}^4$$

$$A_c = 46.2 \text{ cm}^2$$

$$J_t = 18 \text{ cm}^4 \quad (\text{calculado como viga aberta})$$

$$A_s = 12 \text{ cm}^2$$

III - transversais, compostas por perfis "T" montados, com dimensões 25 x 12. Devido ao modo de flexão dessas vigas (uma só onda ao longo do comprimento L) podemos considerar uma largura colaborante de chapeamento, com 100 cm.

As características seccionais da viga correspondente a essa largura, são:

$$I = 10.000 \text{ cm}^4$$

$$A_s = 25 \text{ cm}^2$$

$$J_t = 45.6 \text{ cm}^4 \quad (\text{calculado como viga aberta}).$$

04 - Objetivos do estudo com grelha genérica.

a) Com a grelha aberta assim obtida, procederemos a uma série de testes, visando quantificar as influências de engastamento das transversais, e estudar o desvio em relação a resultados conhecidos, que é introduzido pela utilização de uma teoria mais apurada. Em cada caso será calculado um

resultado teórico conhecido para efeito de comparação. O intuito é determinar se o programa desenvolvido realmente ~~reex~~
~~pressa~~ resultados coerentes em relação a resultados tidos como válidos, para posteriormente ser aplicado aos casos, em que esses resultados não são disponíveis.

b) Para efeito de fornecimento de dados ao computador, cada vão livre de longitudinal será dividido em duas partes, seguindo o raciocínio apresentado em (IV - 03).

Assim procedendo, obteremos uma estrutura com 107 nós e 130 elementos estruturais (Fig. 7.4).

Os dados geométricos e seccionais dos elementos são fixos, para todo o estudo, variando-se apenas as condições de extremidade conforme necessário.

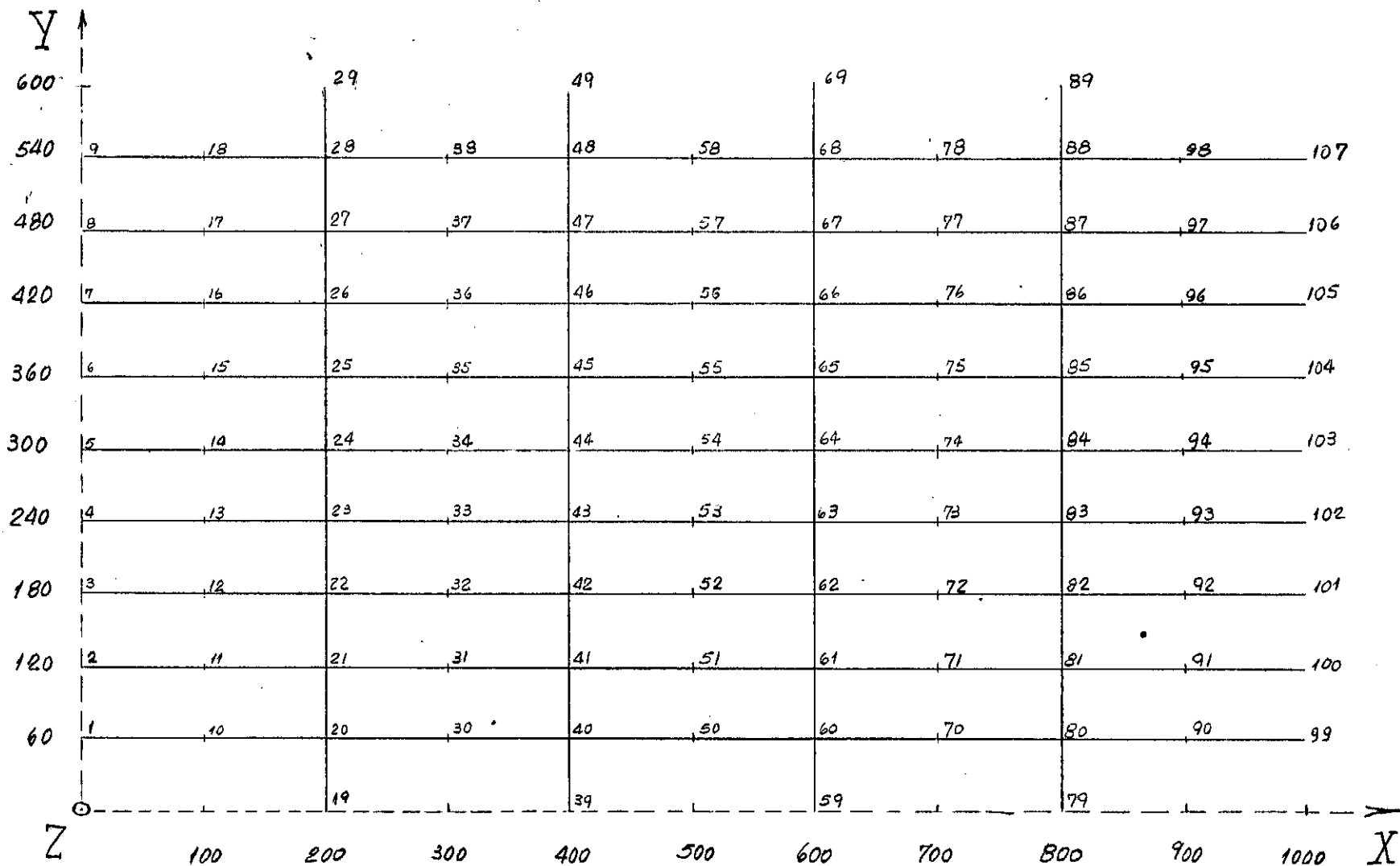


Fig. 7.4

05 - Resultados do estudo da grelha genérica.

Os casos a pesquisar são, como segue:

a) grelha com longitudinais engastadas e transversais livres.

Estudaremos, para efeito de comparação, o caso com longitudinais livres.

Substituindo os valores do problema em (3.13) e (3.15), obtêm-se:

$$I = \left(\frac{\pi}{\mu} \right)^4 \times 270.000 \times \chi_j(\lambda) \quad (7.1)$$

$$\lambda = 0.1158 \quad (7.2)$$

ou com transversais livres, temos

$$\left(\frac{\pi}{\mu} \right)^4 = 1$$

então, resolvendo (7.1) para vários valores λ (Tabela 15.1 de (1)) obtêm-se por interpolação gráfica o valor σ de instabilidade

$$\sigma = 3,363 \text{ ton/cm}^2$$

Resolvendo o problema com longitudinais engastadas por meio do computador, sem incluir efeitos torcionais e de cisalhamento, obteve-se:

$$4.363 < \sigma < 4.393 \text{ ton/cm}^2$$

O aumento verificado sendo, portanto, da ordem de

30%.

b) Grelha com longitudinais engastadas e transversais semiengastadas.

Do estudo teórico comparativo (longitudinais livres) com $(\frac{\pi}{\mu})^4 = 0.595$, usando (7.1) e (7.2), obtém-se

$$\sigma = 4.56 \text{ t/cm}^2$$

O correspondente resultado para longitudinais engastadas é obtido dentro da faixa

$$5.344 < \sigma < 5.375 \text{ ton/cm}^2$$

acusando pois uma diferença da ordem de 18%.

O fato dessa diferença ser menor que no caso anterior, se explica pela maior rigidez do apoio fornecido pelas transversais, o qual diminui o comprimento de flambagem das longitudinais e atenua o efeito do engastamento.

O próximo passo consiste em pesquisar os efeitos da inclusão de cisalhamento e torção na solução de um problema próximo à realidade, que será representado por uma grelha com longitudinais livres e transversais semiengastadas.

c) Inclusão de cisalhamento.

O fator $\phi = \frac{12 EI}{G \frac{A}{A_s} \ell^2}$ é tomado não nulo como nos

casos anteriores, obtendo-se o resultado no intervalo

$$4.43 < \sigma < 4.45 \text{ ton/cm}^2$$

verificando-se uma redução da ordem de 3% no valor da tensão de instabilidade.

d) Inclusão de efeitos torcionais: toma-se $\phi = 0$ e $J_t = J_t$ de viga aberta. Verifica-se que a instabilidade ocorre no intervalo

$$4.56 < \sigma < 4.57 \text{ ton/cm}^2$$

A diferença para o caso teórico é quase não detectável, concluindo-se que o efeito de inclusão da rigidez a torção de viga aberta é desprezível. Porém como já foi observado, a idealização viga aberta não é exata, e o conjunto viga chapa colaborante pode ser considerado como viga quase fechada. Daí se nos afigurar interessante pesquisar o comportamento da grelha com as rigidezes torcionais aumentadas. Serão estudados os casos com $\phi = 0$ e $J_t = 10, 100, 1000$ vezes a inércia torcional das longitudinais abertas. Os resultados são mostrados na tabela 7.2

VALOR DE σ_{fl} (ton/cm ²)	LONGITUDINAIS LIVRES	LONGITUDINAIS ENGASTADAS
TRANSVERSAIS LIVRES	3.363	4.378
TRANSVERSAIS SEMIENGASTADAS	4.56	5.36

TABELA 7.1
INFLUÊNCIA DO ENGASTAMENTO DAS LONGITUDINAIS

	σ_{fl} (ton/cm ²)
TEÓRICO	4.56
CISALHAMENTO INCLUÍDO	4.44
TORÇÃO DE VIGA ABERTA	4.57
10 VÊZES TORÇÃO DE VIGA ABERTA	4.60
100 VÊZES TORÇÃO DE VIGA ABERTA	4.86
1000 VÊZES TORÇÃO DE VIGA ABERTA	5.95

TABELA 7.2
INFLUÊNCIA DE CISALHAMENTO E TORÇÃO PARA GRELHA COM LONGITUDINAIS LIVRES E TRANSVERSAIS SEMIENGASTADAS

06 - C o n c l u s õ e s

a) Na Tabela 7.1 observa-se que o engastamento das longitudinais aumenta sensivelmente a carga de instabilidade da grelha e que, portanto, ao se assegurar o dito engastamento, pode-se diminuir as dimensões seccionais das vigas transversais, implicando em economia de material.

b) Na Tabela 7.2 tentou-se ilustrar o efeito que teria a inclusão gradativa de cisalhamento e torção, sobre o valor da carga de instabilidade.

I - A inclusão de cisalhamento reduziu em 3% o valor teórico de carga de instabilidade, provando, portanto, ser um efeito não de todo desprezível.

II - A inclusão das rigidezes torcionais das vigas consideradas como vigas abertas, em nada alterou os resultados anteriores. Conclui-se daí, que as vigas consideradas como abertas não contribuem substancialmente para a rigidez da grelha.

É preciso lembrar que o modelo viga aberta não é exato para representar a rigidez torcional (como já foi ressaltado em IV - 03 b). Não se levam em conta os impedimentos a deplanação das secções extremas, nem flexão das abas das vigas (que são parte do chapeamento mútuo) efeitos que tendem a aumentar a rigidez torcional.

III - Devido a isso, executaram-se outros testes (com J_t aumentado) para que se pudesse sentir até que ponto a inclusão dêsses efeitos influencia a carga de instabilidade.

Pode-se observar que o efeito é respeitável.

c) Utilização do programa.

Os testes até aqui efetuados (representados nas Tabelas 7.1 e 7.2) representam mais uma localização do método desenvolvido perante resultados conhecidos.

Uma vez provada precisão e aplicabilidade, o passo seguinte é a determinação das cargas de instabilidade de estruturas reais, ou seja, aquelas correspondentes a arranjos demasiadamente complexos, a ponto de não serem calculáveis por meios teóricos. Podemos citar:

- I - Estudo do efeito de transversais com grande rigidez torcional (viga de secção fechada).
- II - Efeito dos pilares.
- III - Efeito de irregularidades.

Êsses estudos serão parte de pesquisa posterior.

* * *

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 - ROSTOVTSSEV, Dimitri M. - "Fundamentals of Strength Calculations of Ship Structures", Rio de Janeiro, March-May, 1970, Lecture Notes.
- 2 - CHANG, Pin-yu - "Elastic Analysis of Grillages including torsional effect and Stability" - Tese de doutoramento, The University of Michigan, 1967.
- 3 - PRZEMIENIECKI, J. S.: - "Theory of Matrix Structural Analysis", Mc Graw Hill Book Company, New York, N.Y., 1968.
- 4 - COWPER, G.R., e outros - "A High Precision Triangular Plate - Bending Element", National Aeronautical Establishment, Ottawa, December, 1968.
- 5 - CALDWELL, J.B. - "Ultimate Longitudinal Strength", TRANS. R.I.N.A., July, 1965.
- 66 - GERE and WEAVER - "Analysis of Framed Structures" - Van Nostrand - 1965.
- 7 - PACITTI, T. - "Fortran Monitor - Princípios", 1969, Ao Livro Técnico.
- 8 - VASCONCELLOS, KA. - "Análise de pórticos por Computadores Digitais", Publicação nº 3.69, COPPE - UFRJ - Agosto, 1969.

- 9 - GALLAGHER, Richard H. - "The Finite Element Method in Elastic Instability Analysis" - Finite Element Techniques, Proceedings of the Symposium on - The University of Stuttgart, Germany, 1969.
- 10 - BRÖNLUND, O.E. - "Eigenvalues of Large Matrices" - Finite Element Techniques, Proceedings of the Symposium on - The University of Stuttgart, Germany, 1969.
- 11 - CALDWELL, O.B., e outros - "Design Philosophy" - The Third International Ship Structure Congress - Oslo , Vol. II - 1967.

* * *

APÊNDICE I

CARACTERÍSTICAS DE RESPOSTA DE UM ELEMENTO DE GRELHA INCLUINDO EFEITOS DE TORÇÃO E CISALHAMENTO

Como visto em IV-03, o elemento de grelha objeto de nosso estudo possui externamente seis graus de liberdade (Fig. 4.1), onde:

$u_1, u_4 = \theta$ deslocamentos torcionais (X)

$u_2, u_5 = \phi$ deslocamentos flexionais (Y)

$u_3, u_6 = w$ deslocamentos lineares (Z)

As correspondentes forças nodais generalizadas são:

$F_1, F_4 = M_T$ momentos torçores

$F_2, F_5 = M$ momentos fletores

$F_3, F_6 = N$ esforços cortantes.

Pelas hipóteses feitas em IV-03.b podemos admitir a independência entre efeitos torcionais e laterais, daí nos ser facultado estudar cada qual separadamente.

01 - Parcela relativa somente aos deslocamentos laterais u_2, u_3 e u_5, u_6 .

As deflexões de uma viga com inclusão do efeito de cisalhamento são dadas por:

$$EI w'' = M(x) - EI \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{GA_s} \frac{dM(x)}{dx} \right) \quad (1)$$

onde A_S é a parcela da área seccional que resiste ao cisalhamento.

Para simplificar o estudo, convém dividir w em duas parcelas; uma devida unicamente à flexão $w_1(x)$, a outra devida ao cisalhamento e representada pela diferença ... $w - w_1$. Então,

$$w(x) = w_1(x) + w_2(x) \quad (2)$$

Com isso a rotação de uma secção genérica poderá ser representada através de duas parcelas distintas:

$$\phi(x) = \frac{d}{dx} w_1(x) \quad (3)$$

devida somente à flexão, e

$$\frac{d}{dx} w_2(x) = -\frac{N(x)}{G A_S} + \alpha \quad (4)$$

devida à distorção.

De (4),

$$w_2(x) = -\int_0^x \frac{N(x)}{G A_S} dx + \alpha x + \beta \quad (5)$$

ou ainda

$$w_2(x) = -\frac{EI}{GA_S} w_1''' + \alpha x + \beta \quad (6)$$

No entanto, podemos admitir que uma viga sujeita apenas a efeitos flexionais tenha uma deformada do tipo polinomial:

$$w_1(x) = Ax^3 + Bx^2 + \bar{C}x + \bar{D} \quad (7)$$

Nesse caso, a deformada, devida unicamente ao efeito do cisalhamento, pode com o auxílio de (7), ser posta na forma:

$$\begin{aligned} w_2(x) &= - \frac{EI(6Ax + 2B)}{G A_S} + \alpha x + \beta = \\ &= x(\alpha - \frac{6A EI}{G A_S}) + \beta - \frac{2B EI}{G A_S} \end{aligned} \quad (8)$$

Temos, então, meios de representar a deformada da viga incluindo ambos os efeitos. De (8) e (7)

$$w(x) = Ax^3 + Bx^2 + x(C - \frac{6A EI}{G A_S}) + D - \frac{2B EI}{G A_S} \quad (9)$$

onde $C = \bar{C} + \alpha$, $D = \bar{D} + \beta$

Para simplificar (9), podemos introduzir a notação

$$\phi = \frac{12 EI}{G A_S \ell^2}; \quad \text{então}$$

$$w(x) = Ax^3 + Bx^2 + (C - \frac{A\ell^2}{2} \phi)x + D - \frac{B\ell^2}{6} \phi \quad (10)$$

As deformações flexionais puras são dadas por (3)

$$\phi = w' - w'_2 = w' + \frac{EI w''_1}{G A_S} = w' + \frac{A\ell^2}{2} \phi \quad (11)$$

Com (10) e (11), podemos encontrar a relação entre os deslocamentos $\phi(x)$ e $w(x)$, e os deslocamentos nodais u_2, u_3 e u_5, u_6 ; bastando, para isso, procurar os valores que ϕ e w assumem quando se dá valores a u_2, u_3, u_5, u_6

de acôrdo com o conceito fundamental do método dos deslocamentos, ou seja, faz-se com que um deles assuma um valor unitário, mantendo bloqueados os demais.

De modo geral, temos:

$$\begin{aligned}u_2 &= w'(0) = C - \frac{A\ell^2}{2} \phi \\u_3 &= w(0) = D - \frac{B\ell^2}{6} \phi \\u_5 &= w'(\ell) = 3A\ell^2 + 2B\ell + C - \frac{A\ell^2}{2} \phi \\u_6 &= w(\ell) = A\ell^3 + B\ell^2 + \ell(C - \frac{A\ell^2}{2} \phi) + D - \frac{B\ell^2}{6} \phi\end{aligned}\tag{12}$$

É preciso observar, no entanto, que ao se manter nulo um deslocamento flexional de um nó, sempre surgirá uma distorção devida ao efeito do cisalhamento, pois se

$$w'(x) + \frac{N(x)}{G A_S} = 0\tag{13}$$

tem-se de (7)

$$w'(x) = - \frac{6A EI}{GA_S} = - \frac{A\ell^2}{2} \phi\tag{14}$$

Isso pôsto, procuremos os valores de $w(x)$ para valores unitários de u_2 , u_3 , u_5 e u_6

$$a) \quad u_3 = 1 ; \quad u_2 = u_5 = - \frac{A\ell^2}{2} \phi ; \quad u_6 = 0$$

de (12)

$$\begin{aligned}
u_2 &= C - \frac{A\ell^2}{2} \Phi = - \frac{A\ell^2}{2} \Phi \\
u_3 &= D - \frac{B\ell^2}{6} \Phi = 1 \\
u_6 &= A\ell^3 + B\ell^2 - \frac{A\ell^3}{2} \Phi\ell + 1 = 0 \\
u_5 &= 3A\ell^2 + 2B\ell - \frac{A\ell^2}{2} \Phi = - \frac{A\ell^2}{2} \Phi
\end{aligned} \tag{15}$$

Resolvendo o sistema (15) obtêm-se

$$\begin{aligned}
A &= \frac{2}{\ell^3} \frac{1}{1 + \Phi} \\
B &= -\frac{3}{\ell^2} \frac{1}{1 + \Phi}
\end{aligned}$$

os quais substituídos em (10) levam ao valor de $w_{u_3}(x)$

$$w_{u_3}(x) = \frac{1}{1+\Phi} (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 + (1 - \xi)\Phi)$$

de (11) obtemos o valor de $\phi_{u_3}(x)$

$$\phi_{u_3}(x) = \frac{1}{\ell(1+\Phi)} (-6\xi + 6\xi^2)$$

$$b) \quad u_2 = 1 - \frac{A\ell^2}{2} \Phi; \quad u_3 = u_6 = 0; \quad u_5 = - \frac{A\ell^2}{2} \Phi$$

de (12)

$$u_2 = C - \frac{A\ell^2}{2} \Phi = 1 - \frac{A\ell^2}{2} \Phi$$

$$u_3 = D - \frac{B\ell^2}{6} \Phi = 0$$

(16)

(16)

$$u_5 = 3A\ell^2 + 2B\ell + 1 - \frac{A\ell^2}{2} \phi = -\frac{A\ell^2}{2} \phi$$

$$u_6 = A\ell^3 + B\ell^2 + \ell(1 - \frac{A\ell^2}{2} \phi) = 0$$

Resolvendo o sistema (16), obtêm-se

$$A = \frac{1}{\ell^2} \frac{1}{1+\phi}$$

$$B = -\frac{2}{\ell} \frac{1}{1+\phi} - \frac{1}{2\ell} \frac{\phi}{1+\phi}$$

os quais, substituídos em (10), levam ao valor de $w_{u_2}(x)$

$$w_{u_2}(x) = \frac{\ell}{1+\phi} (\xi - 2\xi^2 + \xi^3 + \frac{1}{2} (\xi - \xi^2) \phi)$$

de (11) obtemos o valor de $\phi_{u_2}(x)$

$$\phi_{u_2}(x) = \frac{1}{1+\phi} (1 - 4\xi + 3\xi^2 + (1 - \xi)\phi)$$

$$c) \quad u_2 = -\frac{A\ell^2}{2} \phi; \quad u_5 = 1 - \frac{A\ell^2}{2} \phi; \quad u_3 = u_6 = 0$$

de (12)

$$u_2 = C - \frac{A\ell^2}{2} \phi = -\frac{A\ell^2}{2} \phi$$

$$u_3 = D - \frac{B\ell^2}{6} \phi = 0$$

$$u_5 = 3A\ell^2 + 2B\ell - \frac{A\ell^2}{2} \phi = 1 - \frac{A\ell^2}{2} \phi$$

$$u_6 = A\ell^3 + B\ell^2 - \frac{A\ell^3}{2} \phi = 0$$

(17)

Resolvendo o sistema (17), obtêm-se

$$A = \frac{1}{\ell} \frac{1}{1+\Phi}$$

$$B = \frac{1}{\ell} \frac{1}{1+\Phi} + \frac{1}{2\ell} \frac{\Phi}{1+\Phi}$$

os quais, substituídos em (10), levam ao valor de $w_{u_5}(x)$

$$w_{u_5}(x) = \frac{\ell}{1+\Phi} \left(-\xi^2 + \xi^3 - \frac{1}{2} (\xi - \xi^2) \Phi \right)$$

de (11) obtemos o valor de $\phi_{u_5}(x)$

$$\phi_{u_5}(x) = \frac{1}{1+\Phi} (-2\xi + 3\xi^2 + \xi\Phi)$$

$$d) \quad u_2 \doteq u_5 = -\frac{A\ell^2}{2} \Phi ; \quad u_3 = 0 ; \quad u_6 = 1$$

de (12)

$$u_2 = C - \frac{A\ell^2}{2} \Phi = -\frac{A\ell^2}{2} \Phi$$

$$u_3 = D - \frac{B\ell^2}{6} \Phi = 0$$

(18)

$$u_5 = 3A\ell^2 + 2B\ell - \frac{A\ell^2}{2} \Phi = -\frac{A\ell^2}{2} \Phi$$

$$u_6 = A\ell^3 + B\ell^2 - \frac{A\ell^3}{2} \Phi = 1$$

Resolvendo o sistema (18) obtêm-se:

$$A = -\frac{2}{\ell} \frac{1}{1+\Phi}$$

$$B = \frac{3}{\ell} \frac{1}{1+\Phi}$$

os quais, substituídos em (10) levam ao valor de $w_{u_6}(x)$

$$w_{u_6}(x) = \frac{1}{1+\Phi} (3\xi^2 - 2\xi^3 + \xi \Phi)$$

de (11) obtemos o valor de $\phi_{u_6}(x)$

$$\phi_{u_6}(x) = \frac{1}{l(1+\Phi)} (6\xi - 6\xi^2)$$

02 - Parcela relativa somente aos deslocamentos torcionais

u_1 e u_2

As deflexões torcionais podem ser representadas na forma:

$$\theta(x) = \bar{A}x + \bar{B} \quad (19)$$

Com (19), podemos encontrar a relação entre o deslocamento $\theta(x)$ e os deslocamentos nodais u_1 e u_4 , usando o mesmo conceito utilizado em 01.

Pondo u_1, u_4 em função de $\theta(x)$

$$u_1 = \theta(0) = \bar{B}$$

$$u_2 = \theta(l) = \bar{A}l + \bar{B}$$

Dando deslocamentos unitários a u_1 e u_2 obtemos $\theta(x)$.

$$a) \quad u_1 = 1; \quad u_2 = 0$$

de (20)

$$u_1 = \bar{B} = 1$$

$$u_2 = \bar{A}\ell + 1 = 0 \rightarrow \bar{A} = -\frac{1}{\ell}$$

Substituindo as constantes em (19), obtêm-se

$$\theta_{u_1}(x) = 1 - \xi$$

$$b) \quad u_1 = 0 ; \quad u_2 = 1$$

de (20)

$$u_1 = \bar{B} = 0$$

$$u_2 = \bar{A}\ell = 1 \rightarrow \bar{A} = \frac{1}{\ell}$$

Substituindo as constantes em (19), obtêm-se

$$\theta_{u_2}(x) = \xi$$

03 - Com o procedimento delineado em 01 e 02, estamos em condições de colocar os deslocamentos $\phi(x)$, $w(x)$ e $\theta(x)$ de um ponto genérico do elemento estrutural de comprimento ℓ em função dos deslocamentos nodais u_1, u_2, \dots, u_6 .

$$\begin{bmatrix} \hat{w}(x) \\ \phi(x) \\ \theta(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & w_{u_2}(x) & w_{u_3}(x) & 0 & w_{u_5}(x) & w_{u_6}(x) \\ 0 & \phi_{u_2}(x) & \phi_{u_3}(x) & 0 & \phi_{u_5}(x) & \phi_{u_6}(x) \\ \theta_{u_1}(x) & 0 & 0 & \theta_{u_5}(x) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \\ \bar{u}_5 \\ \bar{u}_6 \end{bmatrix} \quad (21)$$

* * *

APÊNDICE II

DEDUÇÃO DAS MATRIZES DE RESPOSTA DE UM ELEMENTO DE GRELHA

Para obter a matriz de resposta de um elemento de grelha, devemos desenvolver as integrais na expressão (4.11).

Durante toda a dedução, serão válidas as seguintes notações:

\bar{k}_{ij} → parcela da matriz de rigidez, devida somente à flexão ou torção;

$\bar{\bar{k}}_{ij}$ → parcela da matriz de rigidez que leva em conta o cisalhamento;

$k_{R_{ij}}$ → elemento da matriz de rigidez;

$k_{G_{ij}}$ → elemento da matriz geométrica.

Usaremos as notações de (21) na forma simplificada, ou seja: $\theta_{u_1}(x) = \theta_{u_1}$; $\phi_{u_2}(x) = \phi_{u_2}$; $w_{u_3}(x) = w_{u_3}$; etc.

Listamos a seguir algumas expressões úteis aos cálculos que se seguem:

$$\theta'_{u_1} = -1$$

$$w'_{u_2} = \frac{1}{1+\phi} (1 - 4\xi + 3\xi^2 + \frac{1}{2} (1 - 2\xi)\phi)$$

$$\phi'_{u_2} = \frac{1}{(1+\phi)\ell} (-4 + 6\xi - \phi)$$

$$w'_{u_3} = \frac{1}{(1+\phi)\ell} (-6\xi + 6\xi^2 - \phi)$$

$$\phi'_{u_3} = \frac{1}{(1+\phi)\ell^2} (-6 + 12\xi)$$

$$\theta'_{u_4} = 1$$

$$w'_{u_5} = \frac{1}{1+\phi} (-2\xi + 3\xi^2 - \frac{1}{2}(1 - 2\xi)\phi)$$

$$\phi'_{u_5} = \frac{1}{(1+\phi)\ell} (-2 + 6\xi + \phi)$$

$$w'_{u_6} = \frac{1}{(1+\phi)\ell} (6\xi - 6\xi^2 + \phi)$$

$$\phi'_{u_6} = \frac{1}{(1+\phi)\ell^2} (6 - 12\xi)$$

04 - Determinaremos de início a parte de rigidez (k_R) da matriz de resposta k .

$$\begin{aligned} \text{a) } \bar{k}_{11} &= G J_t \int_0^\ell (\theta'_{u_1})^2 dx \\ &= \frac{G J_t \ell}{\ell^2} \int_0^1 d\xi = \frac{G J_t}{\ell} \end{aligned}$$

$$\bar{k}_{11} = 0$$

então: $k_{R_{11}} = \frac{G J_t}{\ell}$

b) $k_{R_{21}}, k_{R_{31}}, k_{R_{42}}, k_{R_{43}}, k_{R_{51}}, k_{R_{61}}, k_{R_{54}}, k_{R_{64}}$ são nulos, pois não há influência de flexão sobre torção.

$$\begin{aligned} \text{c) } \bar{k}_{22} &= EI \int_0^\ell (\phi'_{u_2})^2 dx = \\ &= \frac{EI \ell}{(1+\phi)^2 \ell^2} \int_0^1 (36\xi^2 - 48\xi + 16 + 8\phi - 12\xi\phi + \phi^2) d\xi \end{aligned}$$

$$= \frac{EI}{(1+\Phi)^2 \ell} \left(\frac{36}{3} - \frac{48}{2} + 16 + 2\Phi + \Phi^2 \right) =$$

$$= \frac{(4 + 2\Phi + \Phi^2)EI}{(1+\Phi)^2 \ell}$$

$$\bar{k}_{22} = GA_S \int_0^\ell (w'_{u_2} - \phi_{u_2})^2 dx =$$

$$= \frac{GA_S \ell}{(1+\Phi)^2} \int_0^1 \left(-\frac{\Phi}{2}\right)^2 d\xi = \frac{GA_S \ell \Phi^2}{4(1+\Phi)^2}$$

$$k_{R_{22}} = \bar{k}_{22} + \bar{k}_{22} = \frac{(4 + 2\Phi + \Phi^2)EI + (3\Phi)EI}{(1+\Phi)^2 \ell} =$$

$$k_{R_{22}} = \frac{(4 + \Phi)EI}{(1+\Phi)\ell}$$

$$d) \quad \bar{k}_{32} = EI \int_0^\ell (\phi'_{u_3} \phi'_{u_2}) dx =$$

$$= \frac{EI \ell}{(1+\Phi)^2 \ell^3} \int_0^1 (72\xi^2 + 84\xi + 24 + 6\Phi - 12\xi\Phi) d\xi =$$

$$= \frac{EI}{(1+\Phi)^2 \ell^2} \left(\frac{72}{3} - \frac{84}{2} + 24 \right) = \frac{6EI}{(1+\Phi)^2 \ell^2}$$

$$\bar{k}_{32} = GA_S \int_0^\ell (w'_{u_3} - \phi_{u_3}) (w'_{u_2} - \phi_{u_2}) dx =$$

$$= \frac{GA_S \ell}{(1+\Phi)^2 \ell} \int_0^1 \left(-\frac{\Phi}{2}\right) (-\Phi) d\xi = \frac{GA_S \ell \Phi^2}{2(1+\Phi)^2}$$

$$k_{R_{32}} = \bar{k}_{32} + \bar{k}_{32} = \frac{6EI + 6EI \Phi}{(1+\Phi)^2 \ell^2}$$

$$k_{R_{32}} = \frac{6EI}{(1+\Phi)\ell^2}$$

$$\begin{aligned}
e) \quad \bar{k}_{33} &= EI \int_0^l (\phi_{u_3})^2 dx = \\
&= \frac{EI}{(1+\phi)^2} \frac{l^4}{4} \int_0^1 (144\xi^2 - 144\xi + 36) d\xi = \\
&= \frac{EI}{(1+\phi)^2} \frac{l^3}{3} \left(\frac{144}{3} - \frac{144}{2} + 36 \right) = \frac{12 EI}{(1+\phi)^2 l^3} \\
\bar{k}_{33} &= GA_S \int_0^l (w'_{u_3} - \phi_{u_3})^2 dx = \\
&= \frac{GA_S}{(1+\phi)^2} \frac{l^2}{2} \int_0^1 (-\phi)^2 d\xi = \frac{GA_S \phi^2}{(1+\phi)^2 l} \\
k_{R_{33}} &= \bar{k}_{33} + \bar{k}_{33} = \frac{12EI + 12EI \phi}{(1+\phi)^2 l^3} \\
k_{R_{33}} &= \frac{12 EI}{(1+\phi) l^3}
\end{aligned}$$

Os demais termos são obtidos por resoluções semelhantes; limitar-nos-emos a citar os resultados, que também são amplamente divulgados na literatura do gênero⁽³⁾.

$$f) \quad k_{R_{41}} = G J_t \int_0^l (\theta'_{u_1} - \theta'_{u_4}) dx = - \frac{G J_t}{l}$$

$$g) \quad k_{R_{44}} = G J_t \int_0^l (\theta'_{u_4})^2 dx = \frac{G J_t}{l}$$

$$h) \quad k_{R_{51}} = k_{R_{61}} = 0$$

$$i) \quad k_{R_{52}} = EI \int_0^l (\phi'_{u_5} \phi'_{u_2}) dx + GA_S \int_0^l (w'_{u_5} - \phi_{u_5}) (w'_{u_2} - \phi_{u_2}) dx$$

$$k_{R_{52}} = \frac{(2-\Phi) EI}{(1+\Phi) l}$$

$$j) \quad k_{R_{53}} = EI \int_0^l (\phi'_{u_5} \phi'_{u_3}) dx + GA_S \int_0^l (w'_{u_5} - \phi_{u_5}) (w'_{u_3} - \phi_{u_3}) dx$$

$$k_{R_{53}} = - \frac{6EI}{(1+\Phi) l^2}$$

$$k) \quad k_{R_{55}} = EI \int_0^l (\phi'_{u_5})^2 dx + GA_S \int_0^l (w'_{u_5} - \phi_{u_5})^2 dx$$

$$k_{R_{55}} = \frac{(4+\Phi) EI}{(1+\Phi) l}$$

$$l) \quad k_{R_{62}} = EI \int_0^l (\phi'_{u_6} \phi'_{u_2}) dx + GA_S \int_0^l (w'_{u_6} - \phi_{u_6}) (w'_{u_2} - \phi_{u_2}) dx$$

$$k_{R_{62}} = \frac{6EI}{(1+\Phi) l^2}$$

$$m) \quad k_{R_{63}} = EI \int_0^l (\phi'_{u_6} \phi'_{u_3}) dx + GA_S \int_0^l (w'_{u_6} - \phi_{u_6}) (w'_{u_3} - \phi_{u_3}) dx$$

$$k_{R_{63}} = - \frac{12 EI}{(1+\Phi) l^3}$$

$$n) \quad k_{R_{65}} = EI \int_0^l (\phi'_{u_6} \phi'_{u_5}) dx + GA_S \int_0^l (w'_{u_6} - \phi_{u_6}) (w'_{u_5} - \phi_{u_5}) dx$$

$$k_{R_{65}} = \frac{6EI}{(1+\Phi) l^2}$$

$$o) \quad k_{R_{66}} = EI \int_0^l (\phi'_{u_6})^2 dx + GA_S \int_0^l (w'_{u_6} - \phi_{u_6})^2 dx$$

$$k_{R_{66}} = \frac{12 EI}{(1+\Phi) l^3}$$

05 - Determinemos a seguir a parte geométrica da matriz de resposta. De (4.11), com a notação simplificada, vem:

a) Os termos $k_{G_{11}}$, $k_{G_{14}}$, $k_{G_{1j}}$, $k_{G_{4j}}$ são nulos, pois não há influência da torção sobre a forma de flexão assumida pela viga.

$$\begin{aligned} \text{b) } k_{G_{22}} &= T \int_0^l (w'_{u2})^2 dx = \\ &= \frac{Tl}{(1+\Phi)^2} \int_0^1 (9\xi^4 - 24\xi^3 + 22\xi^2 - 8\xi + 1 + \\ &\quad + \Phi - 6\xi\Phi + 11\xi^2\Phi - 6\xi^3\Phi + \frac{\Phi^2}{4} + \\ &\quad - \xi\Phi^2 + \xi^2\Phi^2) d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{G_{22}} &= \frac{Tl}{(1+\Phi)^2} \left(\frac{9}{5} - \frac{24}{4} + \frac{22}{3} - \frac{8}{2} + 1 + \Phi + \right. \\ &\quad \left. - \frac{6}{2}\Phi + \frac{11}{3}\Phi - \frac{6}{4}\Phi + \frac{\Phi^2}{4} - \frac{\Phi^2}{2} + \frac{\Phi^2}{3} \right) \end{aligned}$$

$$k_{G_{22}} = \frac{T}{(1+\Phi)^2} \left(\frac{2}{15} + \frac{\Phi}{6} + \frac{\Phi^2}{12} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{c) } k_{G_{32}} &= T \int_0^l (w'_{u3} w'_{u2}) dx = \\ &= \frac{Tl}{(1+\Phi)^2} \int_0^1 (-18\xi^4 + 42\xi^3 - 30\xi^2 + 6\xi - \Phi + \xi\Phi + \\ &\quad + 6\xi^2\Phi - 6\xi^3\Phi - \Phi^2 + 2\xi\Phi^2) d\xi \end{aligned}$$

$$= \frac{T}{(1+\Phi)^2} \left(-\frac{18}{5} + \frac{42}{4} - \frac{30}{3} + \frac{6}{2} - \Phi + \frac{\Phi}{2} + \frac{6}{3}\Phi + \right. \\ \left. - \frac{6}{4}\Phi - \Phi^2 + \Phi^2 \right)$$

$$k_{G_{32}} = - \frac{T}{(1+\Phi)^2} \left(\frac{1}{10} \right)$$

$$\text{d)} \quad k_{G_{33}} = T \int_0^{\ell} (w'_{u_3})^2 dx \\ = \frac{T\ell}{(1+\Phi)^2 \ell^2} \int_0^1 (36\xi^4 - 72\xi^3 + 36\xi^2 + 12\xi\Phi - 12\xi^2\Phi + \Phi^2) d\xi = \\ = \frac{T}{(1+\Phi)^2 \ell} \left(\frac{36}{5} - \frac{72}{4} + \frac{36}{3} + \frac{12}{2}\Phi - \frac{12}{3}\Phi + \Phi^2 \right)$$

$$k_{G_{33}} = \frac{T}{(1+\Phi)^2 \ell} \left(\frac{6}{5} + 2\Phi + \Phi^2 \right)$$

$$\text{e)} \quad k_{G_{52}} = T \int_0^{\ell} (w'_{u_5} w'_{u_2}) dx = \\ = \frac{T\ell}{(1+\Phi)^2} \int_0^1 (9\xi^4 - 18\xi^3 + 11\xi^2 - 2\xi - \frac{\Phi}{2} + 2\xi\Phi + \\ - 2\xi^2\Phi - \frac{\Phi^2}{4} + \xi\Phi^2 - \xi^2\Phi^2) d\xi = \\ = \frac{T\ell}{(1+\Phi)^2} \left(\frac{9}{5} - \frac{18}{4} + \frac{11}{3} - \frac{2}{2} - \frac{\Phi}{2} + \frac{2}{2}\Phi - \frac{2}{3}\Phi + \right. \\ \left. - \frac{\Phi^2}{4} + \frac{\Phi^2}{2} - \frac{1}{3}\Phi^2 \right)$$

$$k_{G_{52}} = - \frac{T\ell}{(1+\Phi)^2} \left(\frac{1}{30} + \frac{\Phi}{6} + \frac{\Phi^2}{12} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \text{f)} \quad k_{G_{53}} &= T \int_0^{\ell} (w'_{u_5} w'_{u_3}) dx = \\
 &= \frac{T \ell}{(1+\Phi)^2} \int_0^1 (-18\xi^4 + 40\xi^3 - 12\xi^2 + 5\xi\Phi - 12\xi^2\Phi + \\
 &\quad + 6\xi^3\Phi + \Phi^2 - 2\xi\Phi^2) d\xi = \\
 &= \frac{T}{(1+\Phi)^2} \left(-\frac{18}{5} + \frac{40}{4} - \frac{12}{3} + \frac{5}{2}\Phi - \frac{12}{3}\Phi + \frac{6}{4}\Phi + \right. \\
 &\quad \left. + \Phi^2 - \Phi^2 \right)
 \end{aligned}$$

$$k_{G_{53}} = -\frac{T}{(1+\Phi)^2} \left(\frac{1}{10} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \text{g)} \quad k_{G_{55}} &= T \int_0^{\ell} (w_{u_5})^2 dx = \\
 &= \frac{T \ell}{(1+\Phi)^2} \int_0^1 (9\xi^4 - 12\xi^3 + 4\xi^2 + 2\xi\Phi - 7\xi^2\Phi + \\
 &\quad + 6\xi^3\Phi + \frac{\Phi^2}{4} - \xi\Phi^2 + \xi^2\Phi^2) d\xi = \\
 &= \frac{T \ell}{(1+\Phi)^2} \left(\frac{9}{5} - \frac{12}{4} + \frac{4}{3} + \frac{2}{2}\Phi - \frac{7}{3}\Phi + \frac{6}{4}\Phi + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\Phi^2}{4} - \frac{1}{2}\Phi^2 + \frac{1}{3}\Phi^2 \right)
 \end{aligned}$$

$$k_{G_{55}} = \frac{T \ell}{(1+\Phi)^2} \left(\frac{2}{15} + \frac{\Phi}{6} + \frac{\Phi^2}{12} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \text{h)} \quad k_{G_{62}} &= T \int_0^{\ell} (w'_{u_6} w'_{u_2}) dx = \\
 &= \frac{T \ell}{(1+\Phi)^2} \int_0^1 (18\xi^4 - 42\xi^3 + 30\xi^2 - 6\xi + \Phi - \xi\Phi + \\
 &\quad - 6\xi^2\Phi + 6\xi^3\Phi + \Phi^2 - 2\xi\Phi^2) d\xi =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{T}{(1+\Phi)^2} \left(\frac{18}{5} - \frac{42}{4} + \frac{30}{3} - \frac{6}{2} + \Phi - \frac{\Phi}{2} - \frac{6}{3} \Phi + \right. \\ \left. + \frac{6}{4} \Phi + \Phi^2 - \Phi^2 \right)$$

$$k_{G_{62}} = \frac{T}{(1+\Phi)^2} \left(\frac{1}{10} \right)$$

$$\text{i)} \quad k_{G_{63}} = T \int_0^{\ell} (w'_{u_6} w'_{u_3}) dx = \\ = \frac{T\ell}{(1+\Phi)^2 \ell^2} \int_0^1 (-36\xi^4 + 72\xi^3 - 36\xi^2 - 12\xi\Phi + 12\xi^2\Phi + \\ - \Phi^2) d\xi = \\ = \frac{T}{(1+\Phi)^2 \ell} \left(-\frac{36}{5} + \frac{72}{4} - \frac{36}{3} - \frac{12}{2} \Phi + \frac{12}{3} \Phi^2 - \Phi^2 \right)$$

$$k_{G_{63}} = - \frac{T}{(1+\Phi)^2 \ell} \left(\frac{6}{5} + 2\Phi + \Phi^2 \right)$$

$$\text{ii)} \quad k_{G_{65}} = T \int_0^{\ell} (w'_{u_6} w'_{u_5}) dx = \\ = \frac{T\ell}{(1+\Phi)^2 \ell^2} \int_0^1 (18\xi^4 - 40\xi^3 + 12\xi^2 + 5\xi\Phi + 12\xi^2\Phi + \\ - 6\xi^3\Phi - \Phi^2 + 2\xi\Phi^2) d\xi = \\ = \frac{T}{(1+\Phi)^2} \left(\frac{18}{5} - \frac{40}{4} + \frac{12}{3} + \frac{5}{2} \Phi + \frac{12}{3} \Phi - \frac{6}{4} \Phi + \right. \\ \left. - \Phi^2 + \frac{2}{2} \Phi^2 \right)$$

$$k_{G_{65}} = \frac{T}{(1+\Phi^2)} \left(\frac{1}{10} \right)$$

$$\begin{aligned}
k) \quad k_{G_{66}} &= T \int_0^{\ell} (w'_{u_6})^2 dx = \\
&= \frac{T\ell}{(1+\Phi)^2 \ell^2} \int_0^1 (36\xi^4 - 72\xi^3 - 36\xi^2 + 12\xi\Phi - 12\xi^2\Phi + \\
&\quad + \Phi^2) d\xi = \\
&= \frac{T}{(1+\Phi)^2 \ell} \left(\frac{36}{5} - \frac{72}{4} + \frac{36}{3} - \frac{12}{2} \Phi + \frac{12}{3} \Phi + \Phi^2 \right) \\
k_{G_{66}} &= \frac{T}{(1+\Phi)^2 \ell} \left(\frac{6}{5} + 2\Phi + \Phi^2 \right)
\end{aligned}$$

Dêste modo, obtemos os termos da parte geométrica da matriz de resposta para o elemento de grelha, incluído o efeito do cisalhamento.

* * *

APÊNDICE III

LISTAGEM DE PROGRAMA FORTRAN UTILIZÁVEL PA
RA SOLUÇÃO DO PROBLEMA GERAL DE INSTABILIDADE

NM= 18
 NJ= 18
 E = 2100.TON/CM2
 G = 805.TON/CM2
 IO=50000.CM4
 LO= 300.CM

CARACTERISTICAS DOS ELEMENTOS ESTRUTURAIS

NO	XJ	YJ	NO	XK	YK	IN	JY	AS	AC	CX	CY	L
3	0.0	500.0	4	300.0	500.0	50000.00	0.00	0.00	150.00	1.000	0.000	300.00
10	0.0	1000.0	11	300.0	1000.0	50000.00	0.00	0.00	150.00	1.000	0.000	300.00
4	300.0	500.0	5	600.0	500.0	50000.00	0.00	0.00	150.00	1.000	0.000	300.00
11	300.0	1000.0	12	600.0	1000.0	50000.00	0.00	0.00	150.00	1.000	0.000	300.00
1	600.0	0.0	5	600.0	500.0	50000.00	0.00	0.00	0.00	0.000	1.000	500.00
5	600.0	500.0	12	600.0	1000.0	50000.00	0.00	0.00	0.00	0.000	1.000	500.00
12	600.0	1000.0	17	600.0	1500.0	50000.00	0.00	0.00	0.00	0.000	1.000	500.00
5	600.0	500.0	6	900.0	500.0	50000.00	0.00	0.00	150.00	1.000	0.000	300.00
12	600.0	1000.0	13	900.0	1000.0	50000.00	0.00	0.00	150.00	1.000	0.000	300.00
6	900.0	500.0	7	1200.0	500.0	50000.00	0.00	0.00	150.00	1.000	0.000	300.00
13	900.0	1000.0	14	1200.0	1000.0	50000.00	0.00	0.00	150.00	1.000	0.000	300.00
2	1200.0	0.0	7	1200.0	500.0	50000.00	0.00	0.00	0.00	0.000	1.000	500.00
7	1200.0	500.0	14	1200.0	1000.0	50000.00	0.00	0.00	0.00	0.000	1.000	500.00
14	1200.0	1000.0	18	1200.0	1500.0	50000.00	0.00	0.00	0.00	0.000	1.000	500.00
7	1200.0	500.0	8	1500.0	500.0	50000.00	0.00	0.00	150.00	1.000	0.000	300.00
14	1200.0	1000.0	15	1500.0	1000.0	50000.00	0.00	0.00	150.00	1.000	0.000	300.00
8	1500.0	500.0	9	1800.0	500.0	50000.00	0.00	0.00	150.00	1.000	0.000	300.00
15	1500.0	1000.0	16	1800.0	1000.0	50000.00	0.00	0.00	150.00	1.000	0.000	300.00

CONDICOES DE CONTORNO

137

NO	LR1	LR2	LR3	RIG1	RIG2	RIG3
1	1	0	0	1.55000	0.00000	0.00000
2	1	0	0	1.55000	0.00000	0.00000
3	0	1	0	0.00000	0.00000	0.00000
4	0	1	1	0.00000	0.00000	0.00000
5	1	1	1	0.00000	0.00000	0.00000
6	0	1	1	0.00000	0.00000	0.00000
7	1	1	1	0.00000	0.00000	0.00000
8	0	1	1	0.00000	0.00000	0.00000
9	0	1	0	0.00000	0.00000	0.00000
10	0	1	0	0.00000	0.00000	0.00000
11	0	1	1	0.00000	0.00000	0.00000
12	1	1	1	0.00000	0.00000	0.00000
13	0	1	1	0.00000	0.00000	0.00000
14	1	1	1	0.00000	0.00000	0.00000
15	0	1	1	0.00000	0.00000	0.00000
16	0	1	0	0.00000	0.00000	0.00000
17	1	0	0	1.55000	0.00000	0.00000
18	1	0	0	1.55000	0.00000	0.00000

NUMERO TOTAL DE GRAUS DE LIBERDADE = 32

LARGURA DA CINTA = 24

MATRIZ INDEXAL

138

ELEMENTO	U1	U2	U3	U4	U5	U6
1	0	3	0	0	4	5
2	0	17	0	0	18	19
3	0	4	5	6	7	8
4	0	18	19	20	21	22
5	1	0	0	6	7	8
6	6	7	8	20	21	22
7	20	21	22	31	0	0
8	6	7	8	0	9	10
9	20	21	22	0	23	24
10	0	9	10	11	12	13
11	0	23	24	25	26	27
12	2	0	0	11	12	13
13	11	12	13	25	26	27
14	25	26	27	32	0	0
15	11	12	13	0	14	15
16	25	26	27	0	28	29
17	0	14	15	0	16	0
18	0	28	29	0	30	0

TENTATIVAS PARA O INTERVALO DE VARIACAO 7.00000 --- 10.00000 TONELADAS POR CENTIMETRO QUADRADO

NA TENSÃO 7.00000 TONELADAS POR CENTIMETRO QUADRADO , OCORRERAM 0 PIVOS NEGATIVOS

NA TENSÃO 8.00000 TONELADAS POR CENTIMETRO QUADRADO , OCORRERAM 0 PIVOS NEGATIVOS

NA TENSÃO 9.00000 TONELADAS POR CENTIMETRO QUADRADO , OCORRERAM 1 PIVOS NEGATIVOS

TENTATIVAS PARA O INTERVALO DE VARIACAO 8.00000 --- 9.00000 TONELADAS POR CENTIMETRO QUADRADO

NA TENSÃO 8.33333 TONELADAS POR CENTIMETRO QUADRADO , OCORRERAM 1 PIVOS NEGATIVOS

TENTATIVAS PARA O INTERVALO DE VARIACAO 7.99999 --- 8.33333 TONELADAS POR CENTIMETRO QUADRADO

NA TENSÃO 8.11111 TONELADAS POR CENTIMETRO QUADRADO , OCORRERAM 0 PIVOS NEGATIVOS

NA TENSÃO 8.22222 TONELADAS POR CENTIMETRO QUADRADO , OCORRERAM 1 PIVOS NEGATIVOS

CORREU A INSTABILIDADE COM O VALOR ACIMA

APÊNDICE IV

SAÍDA DO PROGRAMA PARA
GRELHA SIMPLIFICADA (VII - 02)

// JOB T 00FF 10FF

A 63

31027

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	00FF	00FF	0000
0001	10FF	10FF	0001

V2 M05 ACTUAL 32K CONFIG 32K

// FOR

*IOCS(2501READER,1403PRINTER)

*ONE WORD INTEGERS

*LIST SOURCE PROGRAM

```

      INTEGER CHECK,A(403),AA
      REAL IN(150),JT(150),L(150),MI(3),IO,LO
      DIMENSION R(48,48),DET(2),CX(150),CY(150),AC(150),AS(150),RIG(1206
1),IND(150,6),NMI(998,4),JJ(150),JK(150),LCR(1206),LR(1206),NML(402
1,4)

```

C

C LEITURA DAS CARACTERISTICAS DA ESTRUTURA

C

```

      READ(8,7)NM,NJ,E,G,IO,LO
      WRITE(5,1)NM,NJ,E,G,IO,LO
      WRITE(5,4)
      DO 102 I=1,NM
      READ(8,2) JJ(I),XJ,YJ,JK(I),XK,YK,IN(I),JT(I),AS(I),AC(I)
      DX=XK-XJ
      DY=YK-YJ
      L(I)=SQRT(DX**2+DY**2)
      CY(I)=DY/L(I)
      CX(I)=DX/L(I)
      WRITE(5,3)JJ(I),XJ,YJ,JK(I),XK,YK,IN(I),JT(I),AS(I),AC(I),CX(I),CY
1(I),L(I)

```

102 CONTINUE

C

C LEITURA DAS CONDICÕES DE CONTOURNO E GRAUS DE LIBERDADE

C

```

      WRITE(5,5)
      K=1
      DO 120 NC=1,NJ
      READ(8,8)KF,LR1,LR2,LR3,RIG1,RIG2,RIG3
      WRITE(5,6)KF,LR1,LR2,LR3,RIG1,RIG2,RIG3
      NC1=3*NC-2
      NC2= 3*NC-1
      NC3= 3*NC
      LR(NC1)=LR1
      LR(NC2)=LR2
      LR(NC3)=LR3
      RIG(NC1)=RIG1*LO **3/E/IO
      RIG(NC2)=RIG2*LO **3/E/IO
      RIG(NC3)=RIG3*LO **3/E/IO

```

120 CONTINUE

C

C NUMERACAO DAS DESLOCABILIDADES EFETIVAS DA ESTRUTURA

C

```

      N=1
      LCR(1)=LR(1)
      IF(LR(1))104,106,104

```

104 N=2

142

```

106 NJ3=3*NJ
    DO 122 KC=2,NJ3
    IF(LR(KC))108,110,108
108 RIG(N)=RIG(KC)
    N=N+1
110 LCR(KC)=LCR(KC-1)+LR(KC)
122 CONTINUE
    CHECK=LCR(NJ3)
    WRITE(5,27)CHECK

```

```

C
C DETERMINACAO DA LARGURA DA CINTA
C

```

```

    MAX=0.
    DO 126 IC=1,NM
    NX=MAX
    MAX=JK(IC)-JJ(IC)
    IF(MAX-NX)124,126,126
124 MAX=NX
126 CONTINUE
    LAR=3*MAX+3
    IF(LAR-CHECK)133,131,131
131 LAR=CHECK
133 CONTINUE
    WRITE(5,23)LAR

```

```

C
C GERACAO DA TABELA DE RELACIONAMENTO
C

```

```

    DO 112 LC=1,NJ
    A(LC)=0
    DO 112 LLC=1,4
112 NML(LC,LLC)=0
    DO 114 LC=1,CHECK
    DO 114 LLC=1,4
114 NMI(LC,LLC)=0
    I=0
620 I=I+1
    JA=JJ(I)
    KA=JK(I)
    A(JA)=A(JA)+1
    AA=A(JA)
    NML(JA,AA)=I
    A(KA)=A(KA)+1
    AA=A(KA)
    NML(KA,AA)=I
    IF(NM-I)624,624,620
624 CONTINUE

```

```

C
C GERACAO DA MATRIZ INDEXAL
C

```

```

    WRITE(5,26)
    I=0
128 I=I+1
    JA=JJ(I)
    KA=JK(I)
    DO 138 J=1,3
    K=3*JA-3+J
    IF(LR(K))136,134,136
134 IND(I,J)=0
    GO TO 138

```


143

```

136 IND(I,J)=LCR(K)
    LCC=LCR(K)
    NMI(LCC,1)=NML(JA,1)
    NMI(LCC,2)=NML(JA,2)
    NMI(LCC,3)=NML(JA,3)
    NMI(LCC,4)=NML(JA,4)
138 CONTINUE
    DO 144 J=4,6
    K=3*KA-6+J
    IF(LR(K))142,140,142
140 IND(I,J)=0
    GO TO 144
142 IND(I,J)=LCR(K)
    LCC=LCR(K)
    NMI(LCC,1)=NML(KA,1)
    NMI(LCC,2)=NML(KA,2)
    NMI(LCC,3)=NML(KA,3)
    NMI(LCC,4)=NML(KA,4)
144 CONTINUE
    WRITE(5,28)I,(IND(I,J),J=1,6)
    IF(NM-I)146,146,128
146 CONTINUE
C
C  GERACAO DA MATRIZ DE RESPOSTA
C  -----
C
C  1) LEITURA DO INTERVALO DE VARIACAO DA TENSAO E PRECISAO DESEJADA
C
    READ(8,30)SIGMN,SIGMX,ACC,IDEL
    WRITE(5,24)
    WRITE(5,31)SIGMN,SIGMX
    SIG=SIGMN
    ID=1
    DDI=(SIGMX -SIGMN )/IDEL
127 MI(ID)=SIG*LO**2/E/IO
C
C  2) DETERMINACAO DO PRIMEIRO QUADRADO LAR*LAR DA CINTA(MATRIZ OPERACIONAL)
C
    IAC=0
    DO 150 M=1,LAR
    DO 150 N=1,LAR
150 R(M,N)=0
    DO 164 M=1,LAR
    DO 164 N=1,M
    M1=M
    N1=N
C
C  3) DETERMINACAO DOS ELEMENTOS QUE POSSUEM OS GRAUS DE LIBERDADE M1 E N1
C
149 DO 153 KC=1,4
    IF(NMI(M1,KC))155,153,155
155 DO 151 NC=1,4
    IF(NMI(M1,KC)-NMI(N1,NC))151,157,151
157 MD=NMI(M1,KC)
C
C  4) DETERMINACAO DAS DESLOCABILIDADES DOS ELEMENTOS QUE CORRESPONDEM AOS
C  GRAUS DE LIBERDADE M1 E N1
C
    J=0

```

144

```

152 J=J+1
    IF(IND(MD,J)-M1)154,156,154
154 IF(J-6)152,151,151
156 JJJ=0
158 JJJ=JJJ+1
    IF(IND(MD,JJJ)-N1)160,500,160
160 IF(JJJ-6)158,151,151
163 L1=M
    L2=N
    R(L1,L2)=R(L1,L2)+RGI
    GO TO 153
151 CONTINUE
153 CONTINUE
    IF(M-N)159,161,159

```

C

C 5) ACRESCIMO DA CONSTANTE DE MOLLA RIG(K)

C

```

161 K=M+IAC
    L1=M
    L2=N
    R(L1,L2)=R(L1,L2)+RIG(K)
159 L1=M
    L2=N
    R(L2,L1)=R(L1,L2)
    IF(IAC)208,164,208
164 CONTINUE

```

C

C INICIO DO PROCESSO ITERATIVO DO CALCULO DO DETERMINANTE

C

C

C ZERAGEM DA PRIMEIRA COLUNA DA MATRIZ OPERACIONAL

C

```

    INF=0
    D=1
    ISIGN=0
165 D=D*R(1,1)
    IF(R(1,1))162,167,167
162 ISIGN=ISIGN+1
167 CONTINUE
    DO 170 M=2,LAR
    IF(R(M,1))166,170,166
166 R1=R(M,1)/R(1,1)
    DO 169 J=1,LAR
    IF(R(1,J))168,169,168
168 R(M,J)=R(M,J)-R1*R(1,J)
169 CONTINUE
170 CONTINUE

```

C

C CALCULO DA MAIS UMA LINHA E COLUNA DA MATRIZ OPERACIONAL

C

```

    IAC=IAC+1
    LA=LAR-1
    DO 193 N=1,LA
    DO 193 M=1,LA
193 R(M,N)=R(M+1,N+1)
    DO 194 M=1,LAR
    DO 194 N=1,LAR
    R(M,LAR)=0
194 R(LAR,N)=0

```

IF(INF-1)902,901,902

145

C
C TESTE PARA OBTENCAO DO ULTIMO PIVO

901 IF(R(1,1)-0.)165,212,165

902 CONTINUE

M=LAR

DO 208 N=1,LAR

M1=M+IAC

N1=N+IAC

GO TO 149

208 CONTINUE

C
C TESTE PARA DETERMINAR O FIM DA CINTA

K=M+IAC

NHECK=CHECK

IF(NHECK-K)213,213,165

213 INF=1

GO TO 165

C
C ANALISE DOS RESULTADOS E ESCOLHA DE UM NOVO VALOR DE MI(ID)

212 DET(ID)=D

WRITE(5,25)SIG,ISIGN

IF(ISIGN-1)224,226,226

224 SIG=SIG+DDI

GO TO 127

226 SIGMN =SIG-DDI

SIGMX =SIG

DDI=(SIGMX-SIGMN)/IDEL

IF(DDI-ACC)228,228,230

230 SIG=SIGMN +DDI

WRITE(5,31)SIGMN ,SIGMX

GO TO 127

228 WRITE(5,32)

GO TO 222

222 CALL EXIT

C
C SUBPROGRAMA PARA DETERMINACAO DOS TERMOS DA MATRIZ DE RESPOSTA DO ELE-
C MENTO QUE CONTRIBUEM PARA A MATRIZ GLOBAL DE RESPOSTA

500 FI=0

CAA=AC(MD)

IF(CAA)502,504,502

502 JTT=JT(MD)

GO TO 506

504 JTT=100*JT(MD)

506 CONTINUE

RG1=G*JTT *LO /E/IO/L(MD)

RG2=(4+FI)*IN(MD)*LO /IO/L(MD) /(1+FI)- MI(ID)*AC(MD)*L(MD)*

1(2./15+FI/6.+FI**2/12)/(1+FI)**2/LO

RG3=6*IN(MD)*LO**2/IO/L(MD)**2/(1+FI)-MI(ID)*AC(MD)/IO/(1+FI)**2

RG4=12*IN(MD)*LO**3/IO/L(MD)**3/(1+FI)- MI(ID)*AC(MD)*LO/ L(MD)/

1(1+FI)**2*(6./5+2*FI+ FI**2)

RG5=(2-FI)*IN(MD)*LO /IO/L(MD) /(1+FI)+MI(ID)*AC(MD)*L(MD)/LO/

1(1+FI)**2*(1./30+FI/6.+FI**2/12)

GO TO(514,524,534,544,554,564),J

114 GO TO(574,576,578,582,584,580),JJJ

```

524 GO TO(576,586,588,584,592,590),JJJ
534 GO TO(578,588,594,578,588,596),JJJ
544 GO TO(582,584,578,574,576,580),JJJ
554 GO TO(584,592,588,576,586,590),JJJ
564 GO TO(580,590,596,580,590,594),JJJ
574 RGI=RG1*CX(MD)**2+RG2*CY(MD)**2
GO TO 163
576 RGI=(RG1-RG2)*CX(MD)*CY(MD)
GO TO 163
578 RGI=RG3*CY(MD)
GO TO 163
580 RGI=-RG3*CY(MD)
GO TO 163
582 RGI=-RG1*CX(MD)**2+RG5*CY(MD)**2
GO TO 163
584 RGI=-(RG1+RG5)*CX(MD)*CY(MD)
GO TO 163
586 RGI=RG1*CY(MD)**2+RG2*CX(MD)**2
GO TO 163
588 RGI=-RG3*CX(MD)
GO TO 163
590 RGI=RG3*CX(MD)
GO TO 163
592 RGI=-RG1*CY(MD)**2+RG5*CX(MD)**2
GO TO 163
594 RGI=RG4
GO TO 163
596 RGI=-RG4
GO TO 163
1 FORMAT(1H1,10X,'DADOS DA ESTRUTURA',///,10X,'NM=',I6,/,10X,'NJ=',I
16,/,10X,'E=',F6.0,'TON/CM2',/,10X,'G=',F6.0,'TON/CM2',/,10X,'IO=
2',F6.0,'CM4',/,10X,'LO=',F6.0,'CM',////)
2 FORMAT(2(I5,2F8.3),3F10.4,F8.4)
3 FORMAT(2(I10,2F8.1),4F10.2,2F7.3,F10.2,/)
4 FORMAT(30X,'CARACTERISTICAS DOS ELEMENTOS ESTRUTURAIS',///,8X,'NO
1',5X,'XJ',6X,'YJ',9X,'NO'5X 'XK',6X,'YK',5X,'IN',10X,'JY',8X,'AS',
28X,'AC',5X,'CX',5X,'CY',9X,'L',////)
5 FORMAT(1H1,
1 32X,'CONDICOES DE CONTORNO',///,9X,'NO',7X,'LR1',7X,'LR2',7
1X,'LR3',9X,'RIG1',11X,'RIG2',11X,'RIG3',/)
6 FORMAT(4I10,3F15.5,/)
7 FORMAT(2I5,4F10.2)
8 FORMAT(4I5,3F10.2)
23 FORMAT(////,' LARGURA DA CINTA = ',I5)
24 FORMAT(1H1,' TENTATIVAS PARA A DETERMINACAO DA TENSÃO DE INSTABILI
IDADE',///)
25 FORMAT(///,' NA TENSÃO',F10.5,' TONELADAS POR CENTIMETRO QUADRADO
1, OCORRERAM',I2,' PIVOS NEGATIVOS')
26 FORMAT(///,13X,'MATRIZ INDEXAL',//,' ELEMENTO',3X,'U1',3X,'U2',3X
1,'U3',3X,'U4',3X,'U5',3X,'U6',/)
27 FORMAT(1H1,' NUMERO TOTAL DE GRAUS DE LIBERDADE =',I5)
28 FORMAT(I5,I10,5I5,/)
30 FORMAT(3F10.2,I5)
31 FORMAT(///,' TENTATIVAS PARA O INTERVALO DE VARIACAO',F10.5,' ---
1',F10.5,' TONELADAS POR CENTIMETRO QUADRADO')
32 FORMAT(////,' OCORREU A INSTABILIDADE COM O VALOR ACIMA')
END

```